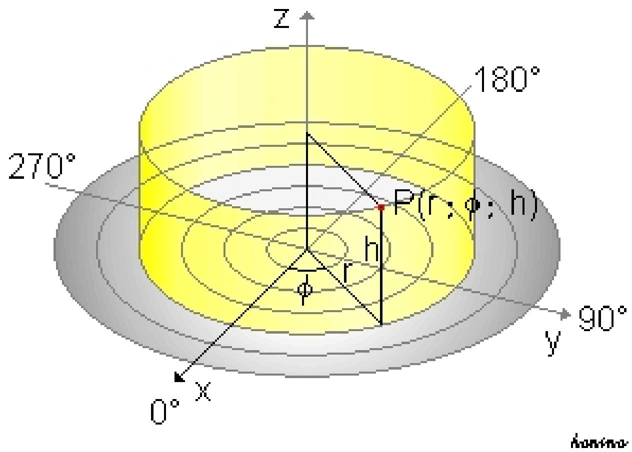
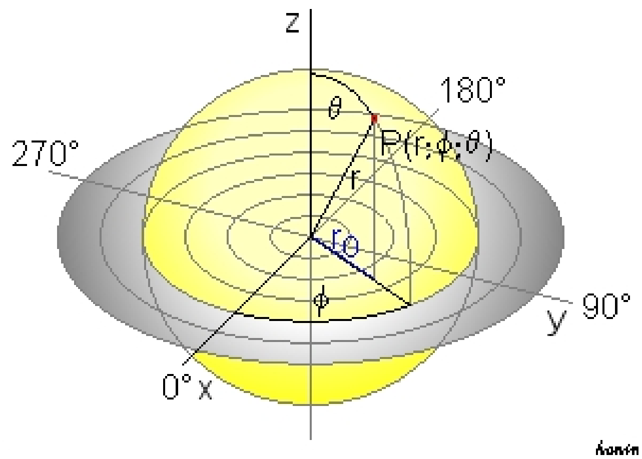
6	**Übungen zur Mathematik für Naturwissenschaftler I (WS 07/08)** PD Dr. Uwe Riedel, Dr. W. Bessler

Zylindrische und sphärische Koordinaten (de.wikipedia.org)





Aufgabe 1:

Skizzieren Sie in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Körper. Geben Sie die Gleichung(en) an, durch die die Körper beschrieben werden.

a) Einem Kreis in der xy-Ebene mit Radius 1 und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt (Gleichung in kartesischen Koordinaten).

b) Eine Ellipse mit den Halbachsen 2 und 4, im Abstand 1 parallel zur der xz-Ebene und dem Mittelpunkt auf der y-Achse (Gleichung in kartesischen Koordinaten).

c) Ein Zylinder mit Radius 2, Achse in der z-Achse, der sich von $z = -1$ bis $z = 2$ erstreckt (Gleichungen in kartesischen und zylindrischen Koordinaten).

d) Eine Kugel mit Radius 5 und Mittelpunkt im Koordinatenursprung (Gleichungen in kartesischen und sphärischen Koordinaten).

Aufgabe 2:

a) Im Zentrum eines kartesischen Koordinatensystem befinde sich ein Proton. Ein Elektron befinde sich im Punkt ($x = 0,5$ Å, $y = -0,5$ Å, $z = -0,5$ Å). Wie lauten die Koordinaten des Elektrons in einem zylindrischen und wie in einem sphärischen Koordinatensystem?

b) In einem sphärischen Koordinatensystem befinde sich das Elektron im Punkt ($r = 0,5$Å, $\phi = 3/4\pi$, $\vartheta = 1/2\pi$). Wie lauten die Koordinaten des Elektrons in kartesischen Koordinaten?

c) Zwischen Proton und Elektron herrscht die Kraft $F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (Coulomb-Gesetz, e = Elementarladung $= 1,60 \cdot 10^{-19}$ C, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ C^2/(Nm^2)). Wie lauten die Koordinaten des Elektrons (in sphärischen Koordinaten), wenn $F = 8,21 \cdot 10^{-8}$ N?

d) Um was für ein chemisches System handelt es sich? Was bedeutet der Zahlenwert von r aus Teilaufgabe c)?

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}$ mit den Gliedern $a_n = 1/n^2$ den Häufungspunkt 0 hat. Führen Sie den Beweis in folgenden Schritten durch:

a) Bestimmen Sie durch systematisches Ausprobieren von welchem Index n_0 an alle folgenden Glieder a_n (mit $n \geq n_0$) kleiner als $\epsilon = 0.01$ sind.

b) Wie hätten Sie das obige Ergebnis für den Index n_0 auch ohne systematisches Probieren erhalten können?

c) Verallgemeinern Sie den in (b) erhaltenen Ausdruck für beliebiges ϵ, d.h. geben Sie eine Formel zur Bestimmung von n_0 bei vorgegebenem beliebigen $\epsilon > 0$ an.

d) Wieso folgt aus der Existenz dieser Formel, dass die oben angegebene Folge gegen 0 konvergiert?

Aufgabe 4:

Konstruieren Sie eine Folge $\{a_n\}$ mit mindestens drei Häufungspunkten, wobei nur ein einziger geschlossener Ausdruck für a_n benutzt werden soll (d.h. keine Fallunterscheidungen!).