Lösungsvorschläge zur 7.Übung

Aufgabe 7.1: (2 Punkte)
Es gilt

$$W_1 = \int_0^{s_0} F(s)\,ds = \frac{1}{2}ks^2\Big|_0^{s_0} = \frac{1}{2}ks_0^2$$

sowie

$$W_2 = \int_{s_0}^{2s_0} F(s)\,ds = \frac{1}{2}ks^2\Big|_{s_0}^{2s_0} = \frac{1}{2}k(s_0^2 - 4s_0^2) = \frac{3}{2}ks_0^2$$

Aufgabe 7.2: (4 Punkte)
Für die Treppenfunktion

$$t(x) := \max\left\{\frac{1}{m}\Big| m \in I\!N,\, m \geq x\right\}$$

gilt $t(x) \leq 1/x$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Damit folgt sofort

$$T_n \leq \int_1^n \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Ferner gilt aufgrund der harmonische Reihe:

$$T_n = \int_1^n t(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} t(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

Aufgabe 7.3: (je Teilaufgabe 2 Punkte)
(a) Mittels partieller Integration $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \cos^2(x)\,dx &= \cos(x)\sin(x)\Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4}\sin^2(x)\,dx \\ &= \cos(\pi/4)\sin(\pi/4) + \int_0^{\pi/4}(1-\cos^2(x))\,dx\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$2\int_0^{\pi/4}\cos^2(x)\,dx = \cos(\pi/4)\sin(\pi/4) + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

bzw.:

$$\int_0^{\pi/4}\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

(b) Mit $y = g(x) = 1 + x^4$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{4}\ln(y)\Big|_1^2 = \frac{\ln(2)}{4}$$

(c) Mit $y = g(x) = \tan(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{3\pi} \frac{dx}{\sin(x/8)\,\cos(x/8)} &= 8\int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{dx}{\tan(x)\,\cos^2(x)} = 8\int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx \\
&= 8\int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{1}{y}\,dy = 8\ln(y)\Big|_{\tan(\pi/8)}^{\tan(3\pi/8)} = 8\ln(\tan(3\pi/8)) - 8\ln(\tan(\pi/8))
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.4: (je Teilaufgabe 2 Punkte)

(a) Setzt man $g' \equiv 1$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\,dx
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich die Behauptung.

(b) Der Flächeninhalt des Einheitskreises ist identisch mit dem vierfachen des folgenden Integrals:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{\pi}{4} - 0$$

Es ergibt sich der Flächeninhalt von π.