# Lösungsvorschläge zur 4.Übung

**Aufgabe 4.1:** (je Teilaufgabe 2 Punkte)
Da für die Konvergenz nur die Werte für großes $n$ relevant sind, setzen wir in beiden Fällen voraus, dass $n > 10$ ist. Dann gilt:

(a) Wenn wir zeigen, dass $\frac{n^{10}}{(n-1)!} \leq C$ gilt, folgt hieraus $|a_n| \leq C/n \to 0$.

$$\frac{n^{10}}{(n-1)!} \leq \frac{n^{10}}{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-10)} = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{10}{n}\right)\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{11}\right)^{-10} = C$$

(b) Gleicher Trick wie zuvor: Wie beschränken $\frac{10^n}{(n-1)!}$.

$$\begin{aligned}\frac{10^n}{(n-1)!} &= 10\left(\frac{(n-1)!}{10^{n-1}}\right)^{-1} = 10\left(\frac{1}{10}\cdot\ldots\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{10}\right)^{-1} \\ &\leq 10\left(\frac{1}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10}\right)^{-1} = C\end{aligned}$$

**Aufgabe 4.2:** (je Teilaufgabe 2 Punkte)
(a) $f$ ist Verkettung von der (stetigen) Exponentialfunktion, der Wurzelfunktion, der Addition und der Betragsfunktion:

$$\begin{aligned} x &\to y = |x| \\ y &\to z = \sqrt{y} \\ z &\to \alpha = z + 3 \\ \alpha &\to \beta = e^{\alpha} \end{aligned}$$

(b) Mit der Betragsfunktion ist auch $1 - |x|$ stetig. Der Nenner von $f$ ist eine Summe eines Polynoms und der stetigen Funktion $\sqrt{x^4+1}$ (Verkettung von Wurzelfunktion und Polynom). Damit ist auch $f$ als Quotient stetiger Funktionen stetig in ihrem Definitionsbereich. Da für den Nenner gilt $1 + x^2 + \sqrt{x^4+1} \geq 1$ ist ganz $\mathbb{R}$ der Definitionsbereich.

(c) Diese Funktion ist lediglich an der möglichen Unstetigkeitsstelle $x = 0$ zu untersuchen, da sie in den den Bereichen $x > 0$ und $x < 0$ jeweils eine stetige Funktion darstellt (nämlich Polynom, bzw. Exponentialfunktion). Nun gilt aber für eine Folge $x_n \searrow 0$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - x_n^2 = 1 = e^0 = f(0)$$

Entsprechendes gilt für eine Folge $x_n \nearrow 0$, und damit auch für beliebige Nullfolgen $(x_n)$.

**Aufgabe 4.3:** (je Teilaufgabe 3 Punkte)
(siehe Blatt 5)

**Aufgabe 4.4:** (4 Punkte)
Nun sollte man eine hübsche Grafik mit einer log-log Skalierung der Achsen zeichnen. Als funktionaler Zusammenhang erhält man dann:

$$f(x) = x^{3{,}4}$$