Lösungsvorschläge zur 3.Übung

Aufgabe 3.1: (4 Punkte)
Gemäß Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned} K_n &= x\frac{q^{n+1}-q}{q-1} \\ K_{n+m} &= K_n q^m - x\frac{q^{m+1}-q}{q-1} \end{aligned}$$

Daher ist $K_{n+m} = 0$ äquivalent mit:

$$(q^{n+1}-q)q^m = q^{m+1}-q$$

Umformung ergibt:

$$q^{-m} = 2 - q^n$$

Anwendung des Logarithmuses auf beiden Seiten ergibt mit $n = 20$ und $q = 1{,}03$:

$$m = -\frac{\ln(2-q^n)}{\ln q} = 55{,}4985$$

Aufgabe 3.2: (je Teilaufgabe 2 Punkte)
(i) Angenommen $a_n = a = (g-s)/b$. Dann folgt der Gleichgewichtszustand:

$$a_{n+1} = a_n(1+g-s-ba_n) = a_n$$

(ii) Die angegebene Folge kann bei hinreichend grossem b auch negative Werte annehmen. Sinnvoll wäre daher folgende Modifikation:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n(1+g-s) - ba_n^2, & \text{wenn } a_n \leq (1+g-s)/b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(iii) $b = 0$: Im Fall $g - s > 0$ divergiert die Folge bestimmt gegen ∞. Die Folge bleibt konstant im Fall $g = s$. Für den Fall $g - s < 0$ muß unterschiden werden, ob die Original-Folge oder die modifizierte nach Aufgabenteil (ii) betrachtet wird. Im letzten Fall liegt offensichtlich Konvergenz gegen Null vor, wenn $g - s < 0$. Wenn hingegen die Original-Folge betrachtet wird, so müssen folgende 3 Fälle gesondert betrachtet werden:
$-1 > 1 + g - s$: Die Folge divergiert und alterniert.
$-1 = 1 + g - s$: Die Folge alterniert, bleibt aber betragsmäßig konstant (also periodisch).
$-1 < 1 + g - s < 1$: Die Folge konvergiert gegen Null.

Aufgabe 3.3: (je Teilaufgabe 2 Punkte)
(i) Hier handelt es sich um die unendliche Geometrische Reihe, die bekanntermaßen für $x = \frac{1}{2}$ konvergent ist gegen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Man erhält die Konvergenz aber auch mittels des Wurzelkriteriums.
(ii) Zunächst sei bemerkt, dass die Folgenglieder a_n vom Betrag her monoton fallen:

$$|a_{n+1}| = \frac{(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = |a_n|$$

Da die a_n das Vorzeichen sukzessive wechseln und monoton fallen, gilt für die Partialsummen:

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2$$

Da $|s_{n+1} - s_n| = |a_n| \to 0$ konvergiert die Reihe.

Bemerkung 1: Es läßt sich auch das sogenannte Leibnitz Kriterium anwenden, dass gerade die Konvergenz von alternierenden Reihen besagt, sofern die Glieder betragsmässig eine monoton fallende Nullfolge bilden.

Bemerkung 2: Das Wurzelkriterium ergibt:

$$|a_n|^{1/n} \quad = \quad \left|\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}\right|^{1/n} \quad = \quad \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/n} \frac{n+1}{n} \to 1\,.$$

Somit läßt sich der Ausdruck $|a_n|^{1/n}$ nicht nach oben von der 1 weg beschränken. Wenn das Wurzelkriterium nicht erfüllt ist, folgt hieraus aber weder Konvergenz noch Divergenz.

(iii) Wie man leicht nachprüft gilt für alle $n \in I\!N$:

$$\frac{n+4}{n^2 - 3n + 1} \quad \geq \quad \frac{1}{n}$$

Es folgt die bestimmte Divergenz der betrachteten Reihe, denn sie ist "minorisiert" durch die divergente harmonische Reihe.

Aufgabe 3.4: (je Teilaufgabe 2 Punkte)

(i) Die erste Folge konvergiert offensichtlich:

$$\frac{4h - h^2}{3h} \quad = \quad \frac{4}{3} - \frac{1}{3n} \longrightarrow \frac{4}{3}$$

(ii)

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{2h} \quad = \quad \frac{2hx + h^2}{2h} = x + \frac{h}{2}$$

Daher konvergiert diese Folge stets gegen x.