Lösungsvorschläge zur 2.Übung

Aufgabe 2.1: (i) Das Gleichung ist offensichtlich äquivalent mit:

$$x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} \quad = \quad 0$$

Die $p, q-$Formel ergibt mit $p = q = -\frac{1}{6}$ die Lösungen:

$$x_{1,2} \quad = \quad -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{12^2} + \frac{1}{6}} = \frac{1 \pm 5}{12}$$

Also $x_1 = 1/2$ und $x_2 = -1/3$.

(ii) Entsprechend ergibt sich für $p = 16/5$, $q = -32/5$:

$$x_{1,2} \quad = \quad -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{8}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \frac{32}{5}} = \frac{-8 \pm \sqrt{224}}{5}$$

Also $x_1 = 1,3933...$ und $x_2 = -4,5933...$

Aufgabe 2.2: (i) Das angegebene Polynom ist nach oben unbeschränkt aber nach unten durch die Zahl

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

beschränkt. Diese Schranke kann man versuchen graphisch zu ermitteln. Exakter geht es aber indem man die Ableitung Null setzt:

$$0 = f'(x) = 4x - 1\,,$$

also $x = 1/4$. Damit ist $y = f(1/4) = 4,875$ die größte untere Schranke.

(ii) Da die Wurzelfunktion nach oben unbeschränkt ist, existiert keine obere Schranke. Ferner nimmt die Wurzelfunktion keine negativen Werte an, also $f \geq 1$. Da $f(0) = 1$, ist $y = 1$ die größte untere Schranke.

Aufgabe 2.3: Die Geschwindigkeit der Poiseuille Strömung berechnet sich zu:

$$v(r) \quad = \quad \frac{a}{4\mu}(R^2 - r^2)$$

bei einem relativen Druckabfall $a = (P_1 - P_2)/L$.

(i) Die maximale Geschwindigkeit im größeren Gefäß ergibt sich zu:

$$v(0) \quad = \quad \frac{a}{4\mu}R^2 = \frac{900}{20\,cm\,2,7 \cdot 10^{-3}}(1.1\,cm)^2 = 20166,666\,\frac{cm}{s} \approx 200\frac{m}{s}$$

Bei dieser (unphysikalische) Geschwindigkeit wäre die Voraussetzung einer laminaren Strömung aber nicht mehr gegeben.

(ii) Diese Aufgabe ist etwas schwieriger: Man sollte sich zunächst überlegen, welche Menge $M(a,R)$ Flüssigkeit durch ein Gefäß mit Radius R und Druckabfall a fließt, nämlich

$$M(a,R) \quad := \quad 2\pi \int_0^R v(r)\, r\, dr\,.$$

Die genaue Menge ist aber gar nicht wichtig, sondern nur die Abhängigkeit vom Radius. Diese Abhängigkeit ist linear in a und quartisch in R:

$$M(a,R) \sim aR^4$$

Dies ist anschaulich auch klar, denn sowohl die Querschnittsfläche, als auch die Strömungsgeschwindigkeit skalieren jeweils quadratisch mit R. Da durch das dickere Gefäß genauso viel fliessen soll wie durch die beiden kleineren, muss gelten:

$$\begin{aligned} M(a_1,R_1) &= 2M(a_2,R_2) \\ \Longrightarrow \quad a_1R_1^4 &= 2a_2R_2^4 \\ \Longrightarrow \quad \frac{a_2}{a_1} &= \frac{R_1^4}{2R_2^4}\,. \end{aligned}$$

Die maximale Geschwindigkeiten im großen (V_1) und kleinen Gefäßen (V_2) ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{a_1}{4\mu}R_1^2 \\ V_2 &= \frac{a_2}{4\mu}R_2^2 \end{aligned}$$

Setzen wir diese Größen ins Verhältnis, so erhalten wir:

$$\frac{V_2}{V_1} \quad = \quad \frac{a_2}{a_1}\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_1^2}{2R_2^2} \approx 1,68$$

Also erhöht sich die Geschwindigkeit um den Faktor $1,68$.

Aufgabe 2.4: *(wird nachgeholt auf Blatt 3)*

Aufgabe 2.5: (i) Diese Funktion ist auf D eine gerade Funktion und damit sicher nicht injektiv, und folglich auch nicht bijektiv. Um die Surjektivität zu beurteilen, ist der Bldbereich entscheidend. Für jedes $y \in Z$ gilt $y - 2 \geq 0$ und somit $x = \sqrt{y-2} \in D$, $f(x) = y$. Also ist f surjektiv.

(ii) Diese Funktion bijektiv (also injektiv und surjektiv), da sie eine Verkettung folgender bijektiver Funktionen jeweils definiert von $D = \mathbb{R}^+$ nach $Z = \mathbb{R}^+$ ist:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow y = x^2 + x \\ y &\rightarrow v = \sqrt{y} \\ v &\rightarrow w = \frac{v}{2} \end{aligned}$$

Die Bijektivität der Abbildung $x \rightarrow y$ folgt aus der Betrachtung, dass die Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 0$ liegen.