Definition Menge

Eine *Menge* ist in der Mathematik kein einfaches, aber sehr nützliches Objekt. Sie wird über ihre Bestandteile, die *Elemente*, definiert; zwei Mengen werden als gleich angesehen, wenn sie die gleichen Elemente haben.

Damit man bemerkt, was es für Probleme gibt, hier ein kleines *Dilemma*, was naiv nicht auflösbar scheint:

Ein Barbier rasiert alle Männer in seiner Stadt, welche sich nicht selbst rasieren. Rasiert er sich selbst?

Definitions- und Wertemengen

Was man grundsätzlich von Mengen wissen sollte, ist folgendes; sie werden benutzt, um *Funktionen* zu definieren und zwar insoweit, als dass eine Funktion Elementen der *Definitionsmenge* andere Elemente der *Wertemenge* zuweist.

Dazu ein kleines Beispiel:

Ein Colaautomat wirft aufgrund von Geld in Kombination mit betimmten Tasten Flaschen aus, die Automatenfunktion heisst also:

bestimmter Geldbetrag und Taste $\longmapsto$ *Flasche*

Typische Mengen in der Analysis sind die aus der Schule bereits bekannten *Zahlen* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$.

Auch die Rationalen Zahlen $\mathbb{R}$ sind in einer Menge zusammengefasst. Aber: Die sind nicht einfach, denn eine reelle Zahl ist leider nicht mehr eindeutig definiert und so muss man auf *Äquivalenzklassen* zurückziehen.

Genauso ist es mit den Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, bei welchen man leider noch die *Anordbarkeit* verliert.

Durchschnitte, Vereinigungen und Komplemente

Bei einem *Mengendurchschnitt* wird eine neue Menge gebildet. In dieser findet man nur noch Elemente, welche in allen Ausgangsmengen waren. Falls es da keine gibt, ist die neue Menge die *Leere Menge* 0.

Bei einer *Vereinigung* von Mengen werden einfach alle Elemente der beteiligten Mengen genommen und in die neue Durchschnittsmenge gesteckt. *Falls ein Element mehrfach vorkommt, wird es bis auf einen Repräsentanten gestrichen. Das wird übrigens immer so gemacht.*

Das *Komplement* ist das Gegenstück einer Menge zu einer Grundmenge. Klingt schwierig, ist aber einfach:

Legen wir beispielsweise die Natürlichen Zahlen zu Grunde. Dann ist das Komplement der Menge der geraden Zahlen einfach die Menge der ungeraden Zahlen. Beide zusammen geben wieder die Natürlichen Zahlen. Zur Gesamtmenge ist die Leere Menge das Komplement.

Minimum, Maximum, Schranken, Supremum, Infimum

Was noch wichtig ist bei einer Zahlenmenge M sind oft das *kleinstes Element* und das *größte Element*.

Denn diese beiden *beschränken* in natürlicher Weise unsere Zahlenmenge. Sie heißen einfach *Minimum min(M)* und *Maximum max(M)*.

Manchmal findet man diese Element nicht, bsp. in der Menge $\{1, 1/2, 1/3, ..., 1/100, ...\}$ gibt es kein kleinstes Element. *Trotzdem ist diese Menge auch beschränkt*:

Die größte Zahl, die gerade noch kleiner ist als jedes Mengenelement, die sogenannte *größte untere Schranke*, wäre hier die 0. Man nennt das das *Infimum inf(M)*.

Das Pendant dazu ist die kleinste obere Schranke, das *Supremum sup(M)*.
Bei uns ist es die 1, also auch das Maximum unserer Menge. Sie fallen hier zusammen.

In einem Beispiel wie $\{0, 1/2, 3/4, 7/8, ...\}$ wäre das Supremum 1, das Maximum gäbe es aber nicht.

Abzählbarkeit, Mächtigkeit

Noch ein letzter Begriff, den man kennen sollte. In der Mathematik gibt es verschiedene Unendlichkeiten. Sie sind verschieden groß. Vorstellen kann man sich das zwar auch, aber folgendes reicht:

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ heisst *abzählbar* wie auch alle Mengen gleicher *Mächtigkeit*, was einfach bedeutet, dass es gleich viele Elemente gibt. Das scheint klar, denn man kann ja einfach durchzählen. Alle Mengen mit weniger Elementen heissen *endlich* und auch abzählbar.

Findet man eine Bijektion (s. Funktionsbegriff) zwischen einer Menge und den natürlichen Zahlen, dann haben sie ja gleich viele Elemente, also wäre auch diese Menge M abzählbar zu nennen.

Zur Info: Es gibt Bijektionen zwischen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$, aber nicht zu $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ ist übrigens die kleinste Menge, welche überabzählbar ist. Es gibt noch viel viel größere Mengen...