Aufgabe 1

Schon in der Aufgabenstellung sollte noch stehen: *Die Energie ist definiert als* $W = \int_{s_1}^{s_2} F ds$, also als Ortsänderung in (Gegen-)Kraftrichtung. Einfachstes Beispiel ist die Potentielle Energie in einem Schwerefeld, kurz die Lageenergie: Wir heben eine Last der Masse m vom Boden, der die Höhe s_1 hat an um die Strecke $h := s_2 - s_1$ auf die Höhe s_2. Dann haben wir augenscheinlich Arbeit gegen die Schwerkraft verrichtet! Diese wäre hier $W = mgh$, denn $F = F_{grav} = mg$ und da die Kraft direkt in Wegrichtung zeigt, passt das. Bei einer schiefen Ebene wäre das Integral immer noch richtig, aber $F \cdot ds$ ist als Skalarprodukt zu verstehen und wir hätten einen Winkel, den Neigungswinkel, zu beachten.

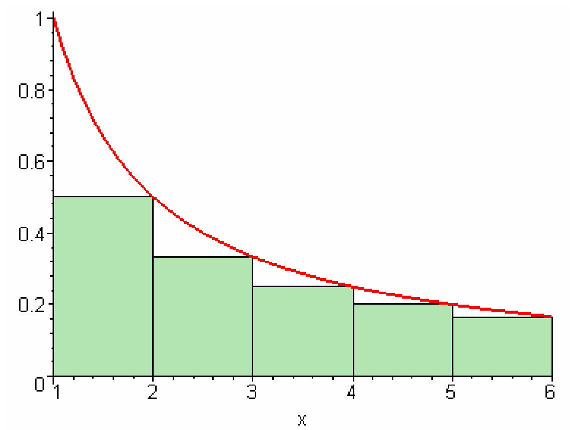
Aufgabe 2

Siehe Lösungsvorschläge. Wie man die Treppenfunktion elegant aufschreibt, findet Ihr dort. Wichtiger ist die Anschauung!

In der Zeichnung (Achtung: die x-Achse startet mit 1 nicht mit 0 und endet schon bei 6!) seht Ihr einen Ausschnitt der Fläche der Treppenfunktion. Sie liegt unterhalb des Integrals. Mit dem Minorantenkriterium ist die Aufgabe gelöst, denn die Fläche ist genau

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Diese Summe divergiert bekanntlich!



Aufgabe 3

Hierzu sollten erst die einzelnen Regeln bekannt sein. Insbesondere in (c) ist die Substitution nicht-trivial:

$$\int_{\pi}^{3\pi} \frac{dx}{sin(x/8)cos(x/8)}$$

Nun wenden wir eine erste Substitution an, nämlich $y := x/8$. Es gilt dann dy/dx $(= y'(x)\ \ = 1/8$ und damit $dx = dy \cdot 8$. Wir ersetzen noch die Grenzen und erhalten schließlich:

$$\int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{dy \cdot 8}{sin(y)cos(y)} = 8 \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{dy}{sin(y)cos(y)}$$

So macht man das. Natürlich kann es bei solchen Substitutionen sein, dass man damit nicht viel weiter kommt. Da es eine Übungsaufgabe ist, geht es allerdings.

Nun verwenden wir den Tipp aus der Augabenstellung und setzen $z := tan(y)$. Dann gilt $dz/dy = 1/cos^2(y)$ und es ist $dy = dz \cdot cos^2(y)$. Auch hier müssen die Grenzen eingesetzt werden und diese sind $z_1 = tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$ und $z_2 = tan(3\pi/8) = \sqrt{2} + 1$. Die genauen Werte zu sehen, dass muss aber nicht sein, dann schreibt man halt die Sache aus, es sieht nur schöner aus. Wir haben dann also:

$$8 \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{dz \cdot cos^2(y)}{sin(y)cos(y)} = 8 \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{cos(y)dz}{sin(y)} = 8 \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{dz}{tan(y)} = 8 \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{dz}{z}$$

Das die Stammfunktion der ln(z) ist, das ist wohl jedem klar. Die Grenzen stimmen auch und das war alles.

Aufgabe 4

Siehe Lösungsvorschläge.