Aufgabe 1

Versuchen wir die Aufgabe wie folgt anzugehen:

(a) Nullfolge heisst hier, dass der Quotient gegen Null geht. Der Quotient besteht dann aus einem beliebig langem Zähler wie Nenner. Wir können den Bruch daher auch in ganz viele Elementarbrüche zerlegen:

$$a_n = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot ... \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}$$

Dabei sind die ersten 10 Zähler n und damit größer gleich den ersten 10 Nennern, welche ja wegen der Fakultät Schritt für Schritt abnehmen.

Danach (wegen n^{10} nach 10 Elementarbrüchen!) kommt im Zähler nichts mehr dazu, daher steht dort die 1 (das *neutrale Element der Multiplikation* für Theoriebegeisterte). Aber im Nenner haben wir immer noch Zahlen größer Eins, daher sind alle Folgebrüche echt kleiner 1, nehmen wir den letzten aus.

Somit haben wir 10 Brüche (= Faktoren) größer Eins, beliebig viele kleiner Eins und einen, der exakt Eins ist (und damit nichts mehr ändert). Augenscheinlich haben wir damit schon die Nullfolge begründet. Um es nochmal mathematisch zu formulieren:

$$a_n \leq (10 \cdot \frac{n}{n-10}) \cdot (\frac{1}{2})^{n-11} \cdot 1 = c \cdot (\frac{1}{2})^n$$

Dabei ist $c \in \mathbb{R}$ noch geeignet zu bestimmen.

In der Ungleichung haben wir die 10 Faktoren größer Eins so zusammengefasst, dass wir den größten dieser Faktoren nehmen und zehnmal hinschreiben. Dadurch entsteht schon die Ungleichung. Dann nehmen wir von dem Rattenschwanz an Brüchen kleiner Eins den größten und schreiben den für alle anderen auch hin. Damit verschärfen wir die Ungleichung weiter. Dann erkennen wir, dass alle Zahlen außerhalb der (n-11)-ten Potenz eine endliche Zahl ergeben. Da wir uns doof stellen, machen wir aus der (n-11)-ten Potenz eine n-te Potenz, müssen die 11 dazugenommenen Faktoren jedoch auch wieder wegnehmen. Die packen wir auch noch in die endliche Zahl rein und nennen diese dann c.

(b) funktoniert ähnlich wie in (a). Wir schreiben um:

$$a_n = \frac{10}{n} \cdot \frac{10}{n-1} \cdot \frac{10}{n-2} \cdot ... \cdot \frac{10}{2} \cdot \frac{10}{1}$$

Hier haben wir folgende Argumentation: Die ersten (n-10) Brüche sind alle kleiner Eins, wobei der letzte von diesen mit 10/10 genau Eins ist. Danach folgen weitere Brüche größer Eins. Die Conclusio ist dieselbe wie oben.

Aufgabe 2

Hier reicht der Lösungsvorschlag sicher aus.

Aufgabe 3

Wird auf dem 5. Aufgabenblatt nachgeholt.

Aufgabe 4

Unten das Schaubild der vorgegebenen Punkte, damit man sich überzeugen kann, dass es eine Gerade ergibt!