## Aufgabe 1

Hier sollte der Rang als Begriff klar sein, siehe dazu die Theorie. Um ihn zu bestimmen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Da er sich unter elementaren Zeilenumformungen nicht ändert, ist die per Hand brauchbarste Methode wohl die Umformung der Ausgangsmatrix M in obere Dreiecksform. Man findet für (i) folgende äquivalente Dreiecksmatrix:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Die Zeilen sind linaer unabhängig, also haben wir vollen Zeilenrang. Damit ist der Rang 3.

Für (ii) findet man ebenfalls $Rang(M) = 3$, denn folgende Matrix ist äquivalent:

$$\begin{pmatrix} 1/7 & 2 & -1/4 \\ 0 & -3 & 5/4 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$$

*Anmerkung 1: Die Matrix ist nicht quadratisch, es ist gibt also keine „schöne“ Hauptdiagonale. Das ist aber nicht schlimm, auch Matrizen der obigen Form sind Dreiecksmatrizen.*

*Anmerkung 2: Der Spaltenrang könnte auch 4 sein. Aber wie man sich leicht denken kann, ist die vierte Spalte abhängig von den anderen drei. Ihr könntet auch mal das transponierte System $M^t$ betrachten (Begriff notfalls klären, siehe die Theorie!).*

## Aufgabe 2

Die Aufgabe klingt enorm schwer, ist es aber nicht. Einfach mal probieren, was gemeint ist!
(i) Wir geben uns also eine quadratische 6x6-Matrix vor. Die Einträge sind ja gegeben. Also einsetzen. Es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Zeilen sind linaer unabhängig, also haben wir einen vollen Zeilenrang von 6. Es wird eine eindeutige Lösung geben!

Wir schreiben nun unser System $A \cdot x = b$ hin und das sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(*): Ich denke, jeder kann jetzt den Lösungsvektor für x ablesen. Fangen wir unten an:
$x_6 = 1/6$, denn dann geht die unterste Zeile auf. Mit diesem Wissen gehen wir in die nächste Zeile, in der steht:

$5x_5 + 5x_6 = 1$, wobei wir $x_6$ kennen. Es ist dann $5x_5 = 1 - 5/6 \Leftrightarrow x_5 = 1/5 - 1/6$. Wir lassen das so mal stehen, denn das ist auch die Gesetzmäßigkeit, die wir für den n. Fall in (ii) brauchen!

Klappe die vierte: $4x_4 + 4x_5 + 4x_6 = 1 \Leftrightarrow x_4 + x_5 + x_6 = 1/4$
$\Leftrightarrow x_4 = 1/4 - x_5 - x_6 = 1/4 - (1/5 - 1/6) - (1/6) = 1/4 - 1/5$.
Wieder die Differenz zweier Brüche.

In der dritten Zeile finden wir mit selber Überlegung: $x_3 = 1/3 - 1/4$. Es heben sich auf der rechten Seite ja immer alle Brüche bis auf einen, hier die 1/4, auf, abgesehen vom ersten und einzig positiven (hier: 1/3).
Der fertige Lösungsvektor hat folgende Form:

$$x = (1/6, (1/5 - 1/6), (1/4 - 1/5), (1/3 - 1/4), (1/2 - 1/3), (1 - 1/2))^t$$

Nun können wir uns noch eine allgemeine Frage stellen, denn diese Bruchdifferenzen lassen sich ja alle noch vereinfachen. Aber wie? Nehmen wir uns den allgemeinsten dieser Art vor und lösen das Problem:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1 \cdot (k+1) - 1 \cdot k}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

Also ergibt sich unser Lösungsvektor „in Schön“ zu
$x = (1/6, 1/30, 1/20, 1/12, 1/6, 1/2)^t$.

Zu (ii) sollte ich nichts mehr sagen müssen. Was wäre denn, wenn wir für 6 oben einfach n einsetzen? Naja, nach obiger Bildungsart würde unser Lösungsvektor $x$ von unten gelesen mit $1/n$ starten und dann mit $1/(n-1) - 1/n$ usw. sich bis oben fortsetzen. Schaut in der Skizze die komplette Lösung nach.

*Anmerkung: Das obige System im Fall $n = 6$ (wie auch im allgemeinen Fall) ist ja äquivalent wie folgt:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

*Darauf kommt man, indem man sukzessive die 6. Zeile durch 6, die fünfte durch 5 usw. teilt (allgemein: die n-te durch n)!*

*Auch hier kann man die obigen Gleichungen (*) ablesen und kommt auf die Lösung.*

## Aufgabe 3

Die Aufgabe ist einfach, hat aber einen wichtigen Kern (Wortwitz!):

**Die allgemeine Lösung eines Gleichungssystems ist immer gegeben durch eine spezielle Lösung plus die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.**

Das sollte man sich merken! Darum erhält man dann (iv), indem man die Lösung von (ii) zur (iii) addiert!