Definition Funktion

Für die, die es genau wissen wollen; eine *Funktion* ist eine *linkseindeutige Relation* auf zwei Mengen.

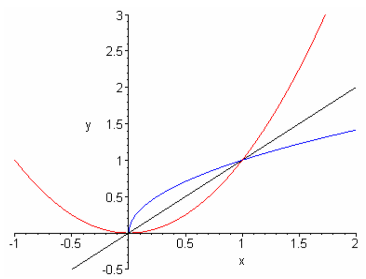
Anschaulich bildet eine Funktion eine Menge auf eine andere ab (siehe *Der Mengenbegriff*).

Bijektivität, Surjektivität, Injektivität

Sie kann (und muss manchmal) auch rückwärts gelesen werden.
Dabei verwendet man am besten die zwei Begriffe *Surjektivität* und *Injektivität*, welche folgendes meinen:
Wirft die Funktion fröhlich Elemente der einen auf die andere (Werte-)Menge und trifft dabei die komplette Wertemenge, dann ist sie surjektiv. Durch sinnvolles Einschränken kann man jede Wertemenge so zusammenstauchen, dass eine vorgegebene Funktion surjektiv wird.
Injektivität für sie heisst, dass die Funktion jedes Wertemengenelement nur einmal erwischt. Falls dies für eine Funktion noch nicht gilt, kann man den Definitionsbereich so verkleinern, dass es geht.

Hat sie beide Eigenschaften, kann man sie umkehren und nennt sie eben *bijektiv*. Diesen Umkehrvorgang erkennt man am Schaubild an der *Spiegelung an der Winkelhalbierenden*.

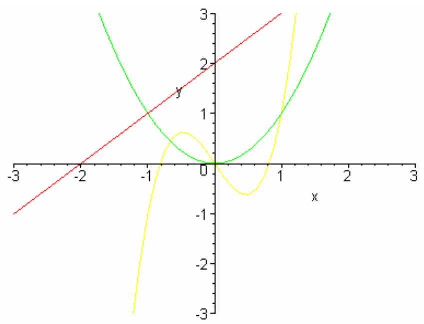
Diese Theorie wird mit ein paar Bildern sicher klarer, es ist einfach:



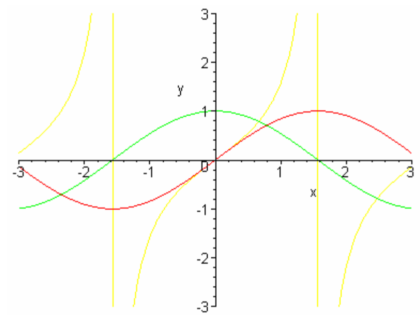
$\mathbb{R}_0^+ \;\longrightarrow\; \mathbb{R}_0^+ \; f(x) = \sqrt{x}$ ist auf dem Definitionsbereich bijektiv.
Das sieht man auch am Schaubild, denn jedem Wert wird genau ein Funktionswert zugeordnet und dabei wird keiner doppelt erwischt, denn $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$!
Die Umkehrfunktion ist dann $f^{-1}(x) = x^2$. Dabei geht die auch von $\mathbb{R}_0^+$ nach $\mathbb{R}_0^+$.
Klar sollte sein, dass $g(x) = x^2$ eigentlich auf $\mathbb{R}$ definiert ist, aber darauf kann man diese nicht umkehren, denn sie wäre nicht injektiv! Eingeschränkt auf $\mathbb{R}^+$ passt es dann wieder.

Wichtige Funktionen

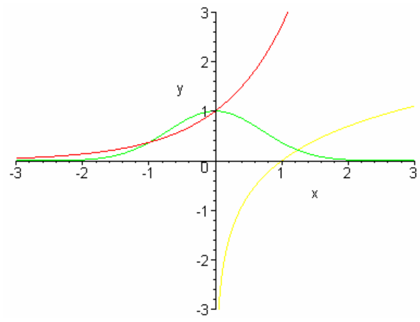
1) *Polynome.* Diesen können beliebigen Grad haben, aber irgendwie sind sie alle gleich. Besonders einfach ist ihre Integration und Differentiation. Deshalb ist es auch schlau, andere Funktionen nach ihnen zu entwickeln. Diese Entwicklung ist die Taylorentwicklung.



2) *Trigonometrische Funktionen.* Das sind Sinus, Cosinus und Co. Auch diese kann man übrigens benutzen, um andere Funktionen anzunähern. Das ist dann die Fourierentwicklung. Ohne die gäbe es bsp. keinen Kernspint, Mathe kann also auch direkte Anwendungen haben!



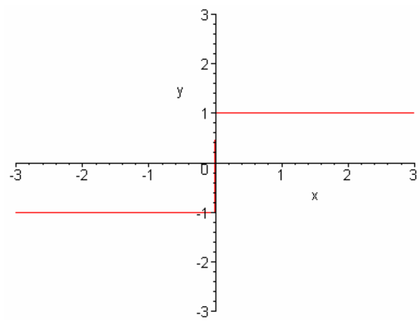
3) *Exponentialfunktionen*. Dazu gehören alle Potenzfunktionen und der Logarithmus. Diese Funktionen eignen sich wiederum sehr gut zum Lösen von Differentialgleichungen. Die sind wiederum fast überall zu finden, wenn man etwas modellieren will.



Kennt man sich mit obigen Funktionen gut aus, dann hat man gutes Werkzeug fürs Modellieren. Alle anderen Funktionen, die es noch so gibt, kann man mit obigen gut beschreiben.

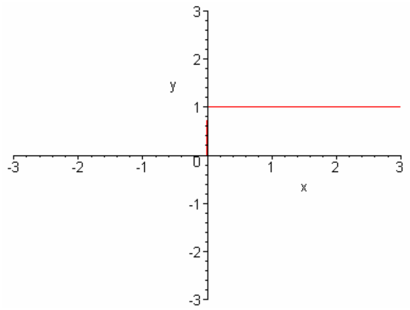
Es gibt natürlich noch viele weitere praktische Funktionenen, von denen ich hier noch einige kurz aufführe:

Vorzeichenfunktion: $$sgn(x) = \begin{cases} +1 \; wenn \; x > 0 \\ 0 \; wenn \; x = 0 \\ -1 \; wenn \; x < 0 \end{cases}$$



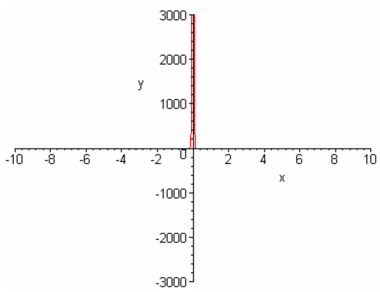
Heaviside-Funktion: $$H(x) = \begin{cases} +1 \; wenn \; x > 0 \\ 1/2 \; wenn \; x = 0 \\ 0 \; wenn \; x < 0 \end{cases}$$

Die wird erst in der Physik richtig bedeutsam wie auch die unten stehende Deltafunktion. Sie stehen nur der Vollständigkeit wegen da.



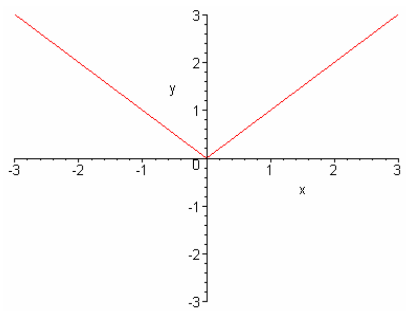
Delta-Funktion: $$\delta(x) = \begin{cases} \infty \; wenn \; x = 0 \\ 0 \; wenn \; x \neq 0 \end{cases}$$

Da diese Funktion nicht gut zu zeichnen ist, habe ich sie „verschmiert“, also etwas breiter gezeichnet...



Betragsfunktion: $abs(x) = sgn(x) \cdot x$

So ist sie elegant formuliert, denn das Vorzeichen vorne hebt sich mit dem sowieso vorhandenen immer weg (weil minus mal minus gleich plus...).



Gauss-Funktion: $[x] = max\{z \in \mathbb{Z} | z \leq x\}$

Die Gaussfunktion rundet also einfach auf die nächste ganze Zahl ab.