11 | **Übungen zur Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 07)**

Prof. J. Warnatz, Dr. W. Bessler

Aufgabe 1:

Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1,5 \\ 1,5 & 2 \end{pmatrix}$$

d.h. berechnen Sie die Transformationsmatrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist. Setzen Sie hierzu eine Matrix mit 4 unbekannten Einträgen an und führen Sie die Matrixmultiplikation mit A aus. Unter Verwendung der Eigenschaften einer Transformationsmatrix leiten Sie dann die Matrixelemente von B ab. Wie ist der Zusammenhang der Diagonalmatrix mit den Eigenwerten der Matrix A?

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \;, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der reell-symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie:

a.) Die Eigenvektoren sind linear unabhängig.

b.) Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal.

Aufgabe 4:

Eine $n \times n$ Matrix A möge n normierte (Betrag ist 1) orthogonale Eigenvektoren $\vec{a}_i$ besitzen. Schreibt man dieses Vektoren als die Zeilen einer neuen Matrix untereinander, so erhält man eine $n \times n$ Matrix, die mit B bezeichnet werden soll. Zeigen Sie, dass B zur Diagonalisierung von A verwendet werden kann.