5	**Übungen zur Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 07)**
	Prof. J. Warnatz, Dr. W. Bessler

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (4, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, -2)$, $\vec{c} = (1, 3, -1)$.

a.) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

b.) Bestimmen Sie die beiden Vektoren, die senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen und die Länge 1 besitzen.

c.) Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des Euklidischen R^3 den Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}$ und den Differenzvektor $\vec{a}-\vec{b}$ für

a.) $\vec{a} = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3\ ,\quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3$

b.) $\vec{a} = (1, 0, 4)\ ,\quad \vec{b} = (5, 8, -6)$

c.) $\vec{a} = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3\ ,\quad \vec{b} = -10\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 10\vec{e}_3$

Aufgabe 3:

Zeigen Sie das gilt

a.) $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 2\vec{a} \times \vec{b}$

b.) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

c.) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times (\vec{c} \times \vec{a})\right) = \left(\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right)^2$

Verwenden Sie den Vektorprodukt-Entwicklungssatz: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)$.

Aufgabe 4:

Die Bahn eines Teilchens im Zentralpotential der Gravitation ist charakterisiert durch die Erhaltung des Drehimpulses $\vec{L} = m\,(\vec{r} \times \vec{v})$ und die Erhaltung der Gesamtenergie $E = \frac{m}{2}v^2 + \frac{\alpha}{r}$. Der Vektor $\vec{r}$ steht für den Ort und $\vec{v}$ für die Geschwindigkeit des Teilchens der Masse m. Das Kraftzentrum (Mitte des Zentralpotentials) liegt dabei im Koordinatenursprung. α ist unabhängig vom Teilchen als konstant anzunehmen. (Erhaltung steht für zeitlich konstant.)

a.) Begründen Sie mit Hilfe der Eigenschaft des Kreuzprodukts, warum die Bahn eines Teilchens innerhalb eines Zentralpotentials immer in einer Ebene liegt.

b.) Zwei identische Teilchen mit gleichem Drehimpuls mögen das Zentralpotential auf elliptischen Bahnen umkreisen. Zu einem Zeitpunkt t_0 haben beide Teilchen den Abstand r_0 vom Kraftzentrum. Die von $\vec{r}$ und $\vec{v}$ eingeschlossenen Winkel sind zu diesem Zeitpunkt $\beta_1 = \pi/2$ und $\beta_2 = \pi/6$ für Teilchen 1 und 2. Berechnen Sie für t_0 das Verhältnis der Geschwindigkeiten und die Gesamtenergiedifferenz der Teilchen.