

Aufgabe 1

Gib den Definitionsbereich folgender Funktionen an:

(a) $f(x) = \ln x$

(b) $f(x) = e^x \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \tan x$

(d) $f(x) = |x|$

(e) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1}$

Welche der obigen Funktionen sind stetig? Welche sind differenzierbar? Gib für die Punkte, in denen sie differenzierbar sind, die erste Ableitung an.

Lösung

Zuerst einmal stellen wir fest, daß wir wieder im Reellen sind.

Die Definitionsbereiche und Ableitungen lauten:

(a) $x \in R^+$, $f'(x) = \frac{1}{x}$. $\ln x$ ist die Umkehrfunktion des $\exp x : R \rightarrow R^+$.

(b) $x \in R_0^+$, $f'(x) = e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$. Hier haben wir ein Produkt zweier Funktionen: $\exp x$ ist auf ganz R definiert, \sqrt{x} lebt aber nur auf R_0^+ . Die angegebene Ableitung existiert allerdings nicht für $x = 0$.

(c) $x \in R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$, $f'(x) = 1 + (\tan x)^2$. Der Tangens ist definiert als $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Also ist zu klären, wann $\cos x = 0$ gilt, denn dann haben wir einen Pol. Da $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$ und der Cosinus 2π -periodisch ist, folgt obige Lösung.

(d) $x \in R$, $f'(x) = \begin{cases} -1 & : x < 0 \\ +1 & : x > 0 \end{cases}$. Der Betrag ist natürlich auf ganz R definiert, er zerstört ja nur das Vorzeichen einer Zahl.

(e) $x \in R \setminus \{-1, 1\}$, $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$. Diese zusammengesetzte Funktion besteht aus zwei Brüchen, welche wir getrennt untersuchen (man könnte auch den Hauptnenner suchen). Der erste Term hat einen Pol bei $x = 1$, der zweite Term besitzt zwei Pole $x = 1$ und $x = -1$.

Die Ableitungen findet man, wenn man in (a) den *Satz über inverse Funktionen* und in (b) und (c) die *Produktregel* beachtet. (d) löst man elementar mit einer Fallunterscheidung, genauso wie (e), wo man gliedweise differenziert.

Aufgabe 2

(Logistische Gleichung)

Gegeben ist die nichtlineare Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Bestimme die Fixpunkte dieser Gleichung und untersuche deren Stabilität.

Lösung

Zuerst berechnet man die Fixpunkte. Diese erfüllen ja die Bedingung $x_{n+1} = x_n$:

$$x_{fix} = rx_{fix}(1 - x_{fix}) \Leftrightarrow x_{fix} \cdot 1 = x_{fix} \cdot r(1 - x_{fix}) \Leftrightarrow (x_{fix} = 0) \vee (1 = r(1 - x_{fix}))$$

Damit ergeben sich also zwei Fixpunkte:

$$x_1 = 0 \wedge x_2 = 1 - \frac{1}{r}$$

Fasst man die Folge als Funktion von x_n auf und erkennt $y = f(x_n)$ gerade als x_{n+1} , so kann man sie auch so schreiben: $f(x) = rx(1 - x)$.

In der Vorlesung wie im Skript wurde die graphische Methode anschaulich gemacht. Setzt man das in Formeln um, so ergibt sich die folgende Bedingung:

$$x_{fix} \text{ stabil} \Leftrightarrow |f'(x_{fix})| < 1.$$

Für unsere oben eingeführte Funktion $f(x)$ ergibt sich folgendes:

$$f(x) = rx(1 - x) = -rx^2 + rx \Rightarrow f'(x) = -2rx + r$$

Setzt man nun in $f'(x)$ die beiden Fixpunkte x_1 und x_2 ein, so findet man:

$$(1) x_1 = 0 \Rightarrow |f'(0)| = |r| > 1 \quad (r \in [1; 4])$$

$$(2) x_2 = 1 - \frac{1}{r} \Rightarrow |f'(1 - \frac{1}{r})| = |2 - r|$$

Für unsere r ist der erste Fixpunkt also immer instabil. Für den zweiten haben wir eine r -abhängige Stabilität: ist $1 < r < 2$, so ist $|f'| < 1$. Die Betragsfunktion für größere r ergibt sich wie folgt: $r > 2 \Rightarrow |2 - r| = (r - 2)$. Wir finden insgesamt, daß der zweite Fixpunkt stabil bleibt, solange $1 < r < 3$ ist.

Aufgabe 3

(Beschränktes Wachstum)

Gegeben ist die folgende Rekursionsgleichung für die Entwicklung einer Population

$$x_{n+1} = \frac{kx_n}{b+x_n}, \quad b, k > 0$$

Gibt es (stabile) Gleichgewichtslösungen? Untersuche analytisch und graphisch!

Lösung

Wie in Aufgabe 2 berechnen wir wieder die Fixpunkte. Diese erfüllen $x_{n+1} = x_n$:

$$x_{fix} = \frac{kx_{fix}}{b+kx_{fix}} \Leftrightarrow x_{fix} \cdot (b + x_{fix}) = x_{fix} \cdot k \Leftrightarrow (x_{fix} = 0) \vee (b + x_{fix} = k)$$

Damit ergeben sich wieder zwei Fixpunkte:

$$x_1 = 0 \wedge x_2 = k - b$$

Wieder schreiben wir die Folge in eine Funktion $f(x)$ um. Wir prüfen danach den Betrag der Ableitung, welche wir mit der Produktregel finden können:

$$f(x) = \frac{kx}{b+x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{kb}{(b+x)^2} \quad \Rightarrow$$

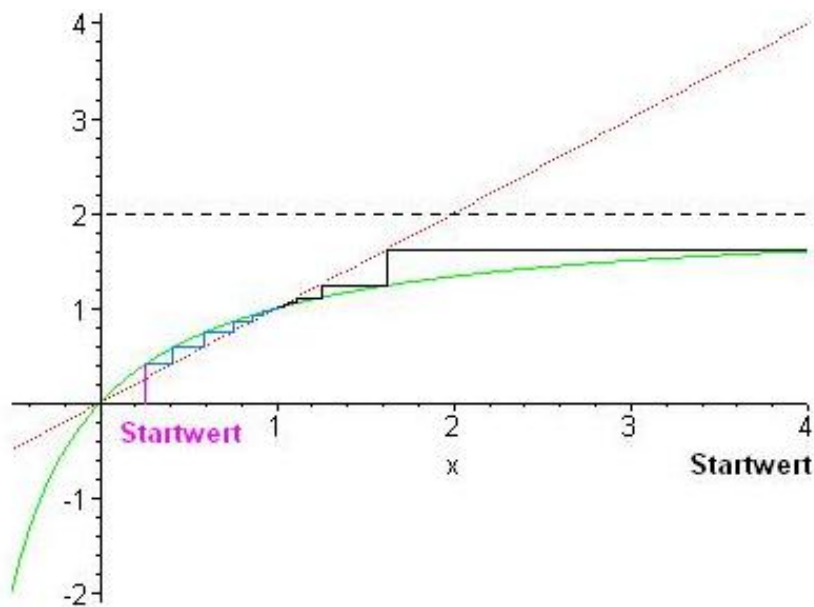
$$(1) \quad x_1 = 0 \Rightarrow |f'(0)| = \left| \frac{k}{b} \right|$$

$$(2) \quad x_2 = k - b \Rightarrow |f'(k - b)| = \left| \frac{b}{k} \right|$$

Für beide Fixpunkte haben wir eine Abhängigkeit von r . Bei $k = b$ gibt es gar keinen stabilen Fixpunkt. Sonst ist x_1 stabil, genau dann wenn x_2 instabil ist, da dann entweder $\frac{b}{k} < 1$ oder $\frac{k}{b} < 1$ gilt.

Der zweite Teil der Aufgabe sei hier exemplarisch für $k = 2$ und $b = 1$ gezeigt. Natürlich kann man mit Fallunterscheidung auch mit allgemeinen b, k arbeiten. In der Zeichnung sind zwei verschiedene Startwerte eingetragen. Da $\frac{b}{k} < 1$ gilt, liegt der zweite Fall vor und wir haben den instabilen Fixpunkt bei $x = 0$ und den stabilen bei $x = k - b = 1$. Der Vollständigkeit halber ist noch die waagrechte Asymptote $y = 2$ eingezeichnet. Diese ergibt sich aus einer Grenzwertbetrachtung:

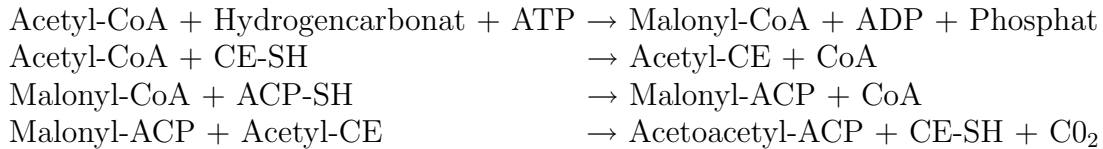
$$f(x) = \frac{kx}{b+x} = \frac{k}{\frac{b}{x}+1} \rightarrow \frac{k}{0+1} = k \text{ für } x \rightarrow \infty. \text{ Mit } k = 2 \text{ ist } f(\infty) = 2.$$



Aufgabe 4

(Biochemische Reaktionen, Stöchiometrie)

Bestimme die stöchiometrische Matrix für folgendes Reaktionssystem aus der Biosynthese von Fettsäuren:



Lösung

Die Lösung sei hier ganz kurz angegeben. Wir listen die Stoffe alphabetisch (was natürlich willkürlich ist!) auf:

Acetoacetyl-ACP, Acetyl-CE, Acetyl-CoA, ACP-SH, ADP,
 ATP, CE-SH, CoA, CO₂,
 Hydrogencarbonat, Malonyl-ACP, Malonyl-CoA, Phosphat.

Es sind insgesamt 13 Stoffe. Damit ist der Zeilenrang der Matrix (also die Anzahl der Zeilen) $m = 13$. Der Spaltenrang ergibt sich aus der Anzahl der Reaktionen. Es sind derer $n = 4$. Also haben wir eine 13×4 -Matrix zu füllen: Wir denken uns die Stoffe vor die jeweilige Zeile wie es die obige Liste angibt. Dann lautet die gesuchte Matrix:

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & +1 \\
 0 & +1 & 0 & -1 \\
 -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 \\
 +1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & +1 \\
 0 & +1 & +1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & +1 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & +1 & -1 \\
 +1 & 0 & -1 & 0 \\
 +1 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$