Blatt 5 18. Mai 2005

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Biologen 2

Dr. Maria Neuss-Radu

1. Wir betrachten die RNS-Kette. Jedes Glied dieser Kette enthält eine von vier verschiedenen Nucleinsäuren: Adenin (A), Guanin (G), Cytosin (C) und Uracil (U). Das Wechseln von einem Glied zu einem anderen heißt Übergang. Es sind also 16 Übergänge möglich: $A \to A$, $A \to G$, $A \to C$, $A \to U$, $G \to A$, usw. Für eine RNS-Kette treten diese Übergänge mit den folgenden relativen Häufigkeiten auf:

A	→	A	=	0,129
A	→	G	=	0,419
A	→	C	=	0,452
A	→	U	=	0
G	→	A	=	0,222
G	→	G	=	0,321
G	→	C	=	0,309
G	→	U	=	0,148
C	→	A	=	0,096
C	→	G	=	0,438
C	→	C	=	0,315
C	→	U	=	0,151
U	→	A	=	0,063
U	→	G	=	0,281
U	→	C	=	0,375
U	→	U	=	0,281

Bilden Sie eine Matrix M mit den relativen Häufigkeiten m_{ij} der Übergänge von der Base $i(i = A, G, C, U)$ zu der Base $j(j = A, G, C, U)$. Berechnen Sie $F = M^2$, die Matrix der relativen Häufigkeiten für Zweischrittübergänge. Was bedeutet das Element f_{23} der Matrix F ?

2. (a) Gegeben sei folgendes System von linearen Rekursionsgleichungen, welches die Evolution zweier Populationen (r_n, m_n) beschreibt:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= a_{11} r_n + a_{12} m_n \\ m_{n+1} &= a_{21} r_n + a_{22} m_n. \end{aligned}$$

Schreiben Sie das obige System in Matrix-Vektor-Form und bestimmen Sie mit Hilfe der Matrizenmultiplikation die explizite Lösung zu gegebenen Anfangswerten (r_0, m_0).

(b) Seien nun

r_n = die Zahl der roten Blutkörperchen im Blutkreislauf am Tag n,

m_n = die Zahl der roten Blutkörperchen, die im Rückenmark am Tag n produziert werden.

Der Anteil der roten Blutkörperchen, die pro Tag von der Milz ausgefiltert werden, ist gleich $\alpha \in [0, 1]$. Die Zahl der roten Blutkörperchen, die pro Tag im Rückenmark produziert werden, ist proportional zu der Zahl der durch die Milz pro Tag ausgesonderten Blutkörperchen. Die Produktionsrate ist β.

Stellen Sie das Gleichungssystem für die Entwicklung von (r_n, m_n) auf und bestimmen Sie (r_2, m_2) zu gegebenen Anfangswerten (r_0, m_0). Hinweis: Benutzen Sie Punkt (a).

3. Sei x' eine Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{1}$$

und y eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems. Zeigen Sie, dass $x = x' + y$ eine Lösung von (1) ist.

4. Zeigen Sie, dass das homogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array}$$

genau dann nur die triviale Lösung besitzt, wenn die Koeffizienten folgende Bedingung erfüllen:

$$ad - bc = 0.$$

Abgabetermin: Montag, 23. 05. 2005, 16 Uhr, in den Fächern im Flur des Instituts für Angewandte Mathematik, INF 294.