EI 10c M 2009-10	MATHEMATIK # Rechnen mit Potenzen	10001111

„There are only 10 sorts of people – those, who understand binary and those, who don't."

In der Mathematik beschäftigt man sich viel mit Zahlen. Dabei ist deren Darstellung ziemlich willkürlich. Hätten wir nur drei Finger an jeder Hand, würden wir vielleicht nicht in Einern, Zehnern, Hundertern usw., sondern in Einern, Sechsern, Sechsunddreißigern usw. zählen. Den Spruch oben verstehen wir gleich!

Suchst du konkret negative Hochzahlen, gehe direkt zu Station 5! Die Stationen vorher sind einführend. Station 2 finde ich persönlich wichtig.

STATION 1:
Vielleicht hilft der Link
http://www.mathe1.de/mathematikbuch/potenzenwurzeln_potenzrechenregeln_87.htm
weiter? Irgendwie finde ich den nicht ideal, aber schau gerne mal drüber.

STATION 2*:
Wichtig bei Potenzen ist eigentlich nur, sich klarzumachen, was das ist, eine Potenz. Die Rechenregeln kann man sich dann eigentlich selbst überlegen. Beginnn wir mit der Zahl 143. Dies ist die 143. Zahl, wenn man mit 1 anfängt zu zählen. Man muss einmal bis 100, zweimal bis 10 und dreimal bis 1 zählen, um sie zu erreichen. Also gilt:

$$\mathbf{143 = 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1}$$

Wir hätten aber auch die Zahl 1.430.000.000.000 nehmen können. Diese Zahl schreibt sich etwas umständlicher:

$$\mathbf{1.430.000.000 = 1 \cdot 1.000.000.000.000 + 4 \cdot 100.000.000.000 + 3 \cdot 10.000.000.000}$$

Das ist übrigens etwa die Verschuldung der BRD in €…

Um das ganz abzukürzen, führt man diese Notation ein:

$$\mathbf{100 = 10^2, \qquad 1000 = 10^3, \qquad \mathit{usw.}}$$

Damit schreibt sich die Neuverschuldung so:

$$\mathbf{1 \cdot 10^{10} + 4 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^8}$$

Schon besser. Die erste Zahl hat 10 Nullen, die zweite 9, die dritte 8. Die Frage ist nur, warum man gerade 10 als „Basis" für unsere Zahlschreibweise nimmt. Übrigens führt man noch

$$\mathbf{10 = 10^1 \quad \mathit{und} \quad 1 = 10^0}$$

ein. Man könnte übrigens genausogut x Striche machen, wobei x gerade die Zahl selbst ist.

Dann schreibt sich 143 so:

IIIIIIIII IIIIIIIII IIIIIIIII IIIIIIIII IIIIIIIII IIIIIIIII IIIIIIIII IIIIIIIII IIIIIIIII IIIIIIIII
IIIIIIIII IIIIIIIII IIIIIIIII IIIIIIIII III.

Das ist natürlich sehr unpraktisch, gerade, wenn es um die Verschuldung der BRD geht!

Wiederum könnte man z.B. 2 als Basis nehmen. Dann schreibt sich die Zahl 143 wie folgt:

$$143 = 1 \cdot 128 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

Dabei ist „abkürzend" $2^2 = 4, 2^3 = 8$ (**kleine Frage: was entspricht 128?**). Bei elektrischen Geräten ist diese sogenannte duale Basis sehr praktisch, denn „Strom an" und „Strom aus" entsprechen einfach 0 und 1 (oder andersherum, ist egal). Manchmal schreibt man die 0er und 1er einfach nacheinander auf, wie es ja auch bei der „normalen" Darstellung mit 10ern, 100ern, 1000ern usw. gemacht wird. Die Zahl 143 wird so zu 10001111 schreiben, denn von hinten gelesen kommt die 1 (2 hoch 0) einmal vor, die 2 (2 hoch 1) einmal, die 4 (2 mal 2 bzw. 2 hoch 2) einmal und die 8 (2 hoch 3) einmal vor. Danach kommen weder 2 hoch 4 (=16), 2 hoch 5 (=32) bzw. 2 hoch 6 (=64) vor. Daher die drei Nuller. Die 128 kommt dann wieder vor, es ist 2 hoch 7.

Damit können wir das Eingangszitat verstehen, „10" meint hier einmal die 2 und nullmal die 1, also „2 sorts of people" – zwei Sorten von Leuten…

STATION 3*:
Die Rechenregeln für Hochzahlen: Vielleicht hier ganz gut zusammengefasst: http://www.zum.de/dwu/mpo002vs.htm. Einfach auf das Bild klicken und es vergrössern.

STATION 4*:
Verallgemeinerung. Bisher haben wir nur ganzzahlige Exponenten zugelassen und in meinem Beispiel war auch die Basis ganzzahlig. Mit dem Logarithmus, den ihr wohl noch nicht hattet, kann man diese Exponentenschreibweise verallgemeinern. Man kann dann beliebige Kommazahlen als Exponent bzw. als Basis schreiben. Etwas aufpassen muss man dabei schon, weil es Ausnahmen gibt:

$$(-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$$

Diese Zahl gibt es für euch nicht. Ihr beschränkt euch auf Zahlen mit Brüchen im Exponenten und die Basis ist nur positiv. Dann gibt es solche Probleme nicht. Dies sind die dann wichtigen Regeln (am Beispiel der Zahl 3):

$$3^0 = 1, \qquad 3^{1/2} = \sqrt{3}\ , \qquad 3^{1/7} = \sqrt[7]{3}, \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

Die erste Zahl ist eine Definition, eine beliebige Zahl hoch 0 ist immer 1!!!

Die zweite Zahl, „Wurzel 3", ist die Zahl, die mit sich selbst malgenommen gerade 3 ergibt. Sie ist erstmal nicht eindeutig bestimmt, denn wie du weißt erfüllen ja sowohl +1,7… wie auch -1,7… die Vorgabe der Gleichung, denn ein Vorzeichen verschwindet ja beim Sichselbstmalnehmen!

Die dritte Zahl ist wie die zweite Zahl zu interpretieren: Es ist die Zahl, die 7mal mit sich selbst malgenommen gerade 3 ergibt. **Die Zahl „über" dem Wurzelzeichen gibt immer an, wie oft du diese Zahl mit sich selbst malnehmen musst, um die Zahl „unter" der Wurzel zu erreichen.** Nur die 2 über der Wurzel lässt man einfach weg (historische Gründe).

Die letzte Schreibweise untersuchen wir jetzt genauer in

STATION 5*:
Eine solche negative Hochzahl kann man einfach umwandeln, indem man die ganze Zahl unter einen 1/…-Bruch schreibt und das Minuszeichen weglässt. Es handelt sich um eine Kurznotation, um Platz zu sparen, genauso wie es 10^3 für 1000 „als Abkürzung“ gibt. Trotzdem kann man die Art der Darstellung „begründen“:

$$Wir\ wissen, dass\quad 3^2 = 9\ \ ist\ und\ dass\quad 9\ \cdot \frac{1}{9} = 1\ \ ist.$$

$$\textbf{Andererseits kennen wir diese Potenzrechenregel}:$$

$$3^2 \cdot 3^{-2} = 3^{2-2} = 3^0 = 1$$

Vergleichen wir beide Ergebnisse, muss $\frac{1}{9} = 3^{-2}$ sein. Und dadurch ist unser Beispiel motiviert:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$$

Es gibt beliebig komplizierte Ausdrücke in dieser Hinsicht. Beispielsweise:

STATION 6:
Ein kleines Beispiel:

$$3^{-3/7}$$

Sieht kompliziert aus, ist es aber eigentlich gar nicht. Erst einmal das Minus weg nach Station 5:

$$\frac{1}{3^{3/7}}$$

Jetzt meint 3/7 im Exponent dieses:

$$3^{3/7} = \sqrt[7]{3^3} = \sqrt[7]{27}$$

Also ergibt sich ingesamt:

$$3^{-3/7} = \frac{1}{\sqrt[7]{27}}$$

DAS WAR'S!