| EI 10a<br>2011-12 | *MATHEMATIK*<br>1. Arbeit - Vektoren | $10\vec{a} = \begin{pmatrix} 27 \\ -1 \end{pmatrix}$ |
|---|---|---|

Diese Arbeit ist **OHNE GTR** zu lösen. Erlaubt und erwünscht ist allerdings ein Geodreieck! Achte darauf, dass du strukturiert schreibst und dass du deine Gedankengänge dokumentierst! **Bearbeitungszeit: 90 Minuten**

**Aufgabe 1** **(1 Punkt)**

Welche Punkte liegen sowohl auf der $x_3$-Achse als auch in der $x_1x_2$-Ebene?

**Nur der Ursprung O(0|0|0)! Er liegt als einziger Punkt sowohl auf der x3-Achse als auch auf der x1x2-Ebene.**

**Aufgabe 2** **(3 Punkte)**

Zeichne alle Punkte des Raumes mit der $x_1$-Koordinate 3 und der $x_2$-Koordinate 2 in ein passendes Koordinatensystem ein. Von welcher Art ist das durch sie definierte geometrische Objekt (Punkt, Gerade, Ebene, keins davon) und warum? Begründe kurz.

**Die Zeichnung spare ich mir. Da x1 und x2 fest sind, malt man im Prinzip alle Punkte vom Typ P(3|2|t) mit t=beliebige Zahl. Dadurch entsteht eine parallele Gerade zur x3-Achse; man kann sich das t in der x3-Koordinate wie einen „Fahrstuhl" vorstellen! Man startet mit t=0 und kann nun von P(3|2|0) aus hoch- oder runterfahren ;-)**

**Aufgabe 3** **(2 Punkte)**

Gegeben ist der Punkt P(1|2|3).

a) Spiegele P am Ursprung O(0|0|0).

**Hier entsteht der Punkt P'(-1|-2|-3)!**

b) Spiegele P an der $x_1x_2$-Ebene.

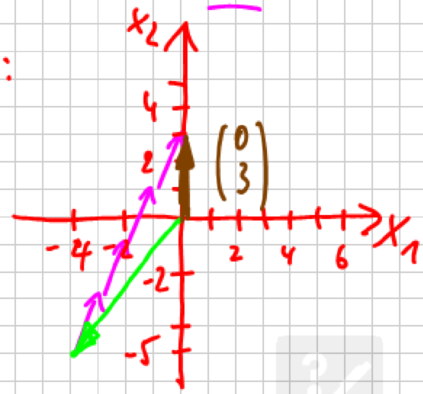
**Hier entsteht der Punkt P*(1|2|-3); nur die x3-Koordinate wird gespiegelt!**

**Aufgabe 4** **(2 Punkte)**

Berechne die Linearkombination $-\binom{4}{5} + 4 \cdot \binom{1}{2}$ und verdeutliche sie mit einer Zeichnung.

$$-\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+4 \\ -5+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bzw:




**Dabei ist das oben KEINE Zeichnung, sondern NUR EINE Skizze ;-)**

**Aufgabe 5** **(2 Punkte)**

Vereinfache den Ausdruck $7\vec{u} + 5(\vec{u} - 2(\vec{u} + \vec{v})) + 8\vec{v}$ soweit wie möglich.

**Man multipliziert die innere Klammer aus und erhält so (ohne Pfeilchen, das nur wegen dem PC!): 7u+5(u-2u-2v)+8v.**

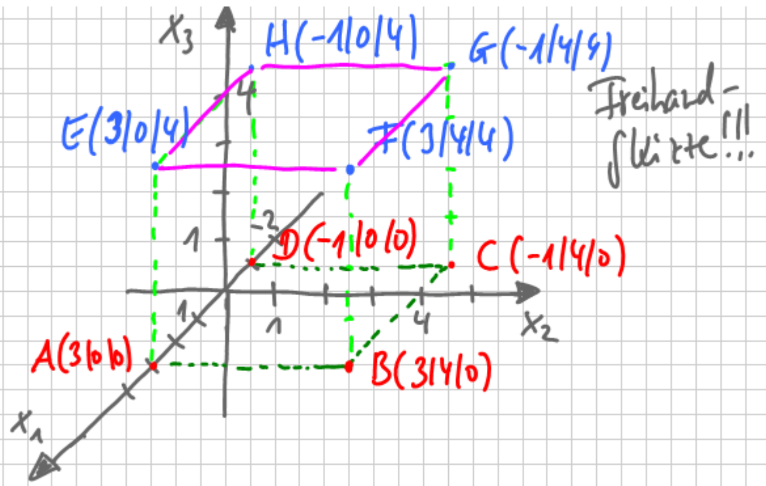
**Vereinfacht ist das 7u+5(-u-2v)+8v. Jetzt multipliziert man die übrige Klammer aus und erhält 7u-5u-10v+8v, was sich zu 2u-2v zusammenfassen lässt. Mehr geht nicht, außer vielleicht 2(u-v)...**

**Aufgabe 6** **(6 Punkte)**

Gegeben ist ein Quader ABCDEFGH mit den Bodeneckpunkten A(3|0|0), B(3|4|0) und C(-1|4|0) und der Dachecke E(3|0|4).

a) Fertige eine Zeichnung des Quaders an. Bestimme dazu die Koordinaten der fehlenden Ecken D, F, G und H.
b) Bestimme die Länge der Raumdiagonalen $\overline{AG}$.
c) Gibt es weitere Raumdiagonalen des Quaders gleicher Länge? Welche?
d) Zusatzfrage: Wie groß ist die Oberfläche des Quaders? **(+1 Punkt)**

**Zu a):**




D(-1|4|0),

da

$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA}$ gilt:

$\vec{OD} = \begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

**Dabei erhält man alle Punkte mit den vorhandenen Wegbeschreibungen! Da es ein Quader ist, gilt eben, dass der Weg von B nach A nach D führt, wenn man in C damit startet.**

**Genauso kommt man von B nach F usw., wenn man den Weg von A nach E von B ab geht!**

**Ablesen aus dem Schaubild führt NICHT zum Erfolg, da unendlich viele Punkte „scheinbar" ebenfalls in Frage kommen würden…**

**Zu b): Hier wird's nun relativ einfach; der Abstand d(A,G) wird so berechnet:**

$$|\vec{AG}| = d(A,G) = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{-4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48} \quad (\approx 7)$$

**Zu c): Es gibt insgesamt 4 Raumdiagonalen; von A nach G, von B nach H, von C nach E und von D nach F. Letztlich ist der Quader ein Würfel!**

**Zu d): Je Seitenfläche sind es 16 (m² bspw.), 6 Flächen insgesamt, also ist die Fläche 96.**

**Aufgabe 7** **(6 Punkte)**

Gegeben sind die Punkte P(1|2|3), Q(0|-1|2) und R(2|2|1), die ein Dreieck bilden.

a) Zeichne das Dreieck in ein geeignetes Koordinatensystem.
b) Überprüfe, ob das Dreieck gleichseitig ist.
c) Berechne den Mittelpunkt der Punkte P und Q.
d) Ergänze das Dreieck PQR um einen Punkt T, so dass PQRT ein Parallelogramm ist.

**Zu a): Spare ich mir!**

**Zu b): Hier muss man prüfen, ob d(P,Q)=d(P,R)=d(Q,R) gilt; nur so sind alle drei Seiten gleich lang! Hier die Rechnung:**

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-2)^2 + (2-3)^2}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}$$

$$|\vec{PR}| = \sqrt{(2-1)^2 + (2-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{11} \neq \sqrt{5} \rightarrow \text{nicht gleichseitig!}$$

**Schon jetzt brauchen wir nicht weiter rechnen! Denn zwei Seiten sind bereits unterschiedlich lang…**

**Zu c): Mittelpunkt: Entweder von P den halben Verbindungsvektor laufen oder einfach die Durchschnittswerte der jeweiligen Koordinaten bilden. Man findet so oder so M(0.5|0.5|2.5), was ein Einzeichnen in das Koordinatensystem von a) bestätigen würde.**

**Zu d): Hier gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine ist, von R aus den Weg von P nach Q zu gehen:**

$$\vec{OT} = \vec{OR} + \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-3 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Damit bestimmt man T(1|-1|0).**

**Aufgabe 8** **(2 Punkte)**

Bestimme die Zahl b so, dass der Ebenenpunkt B(b|4) den Abstand 5 vom Ursprung O(0|0) besitzt!

**Hier gibt es mehrere Möglichkeiten; man kann das Problem dank der Zweidimensionalität auch zeichnerisch lösen. Man findet insgesamt zwei Lösungen; b=-3 oder b=3, also B1(-3|4) bzw. B2(3|4).**

**Letztlich sucht man ja d(B,O)=Wurzel($b^2+4^2$)=5 und da Wurzel(25)=5 ist, sucht man $b^2+16=25$ oder $b^2=9$ und so findet man -3 und 3!**

**Zusatzfrage** **(+2 Punkte)**

Die Darstellung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei man für t jede Zahl einsetzen darf, beschreibt eine Gerade im Raum. Warum? Ist P(1|1|3) ein Punkt der Geraden g?

**Hier kann man eigentlich genauso argumentieren wie in Aufgabe 2! Man fährt vom Punkt Q(1|0|2) aus „Fahrstuhl"! Damit liegt P sicher nicht auf der Geraden, da P nicht mit dem Fahrstuhl erreichbar ist; die x2-Koordinate wird für die Gerade g immer 0 bleiben!**