| EI M5<br>2011-12 | MATHEMATIK<br>5. Probeklausur - Lösung |
|---|---|

**1. Aufgabe** **(2 Punkte)**

Bilde die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$ für reelle Zahlen x.

**Hier haben wir unter der Wurzel noch eine Funktion, daher benutzen wir die Kettenregel. Man schreibt Wurzel(…) um in „Hoch 1/2“ und findet:**

$\boldsymbol{f(x) = (sin(x))^{1/2}}$ **mit** $\boldsymbol{u = (\ldots)^{1/2}\ bzw.\ v = sin(x)}$ **erhält man** $\boldsymbol{f(x) = 0{,}5\left(sin(x)\right)^{-\frac{1}{2}} cos(x)}$**, denn u‘=0,5(…)$^{-1/2}$ bzw. v‘=cos(x). Schön schreibt sich f‘ als**

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{cos(x)}{\sqrt{sin(x)}}$$

**2. Aufgabe** **(3 Punkte)**

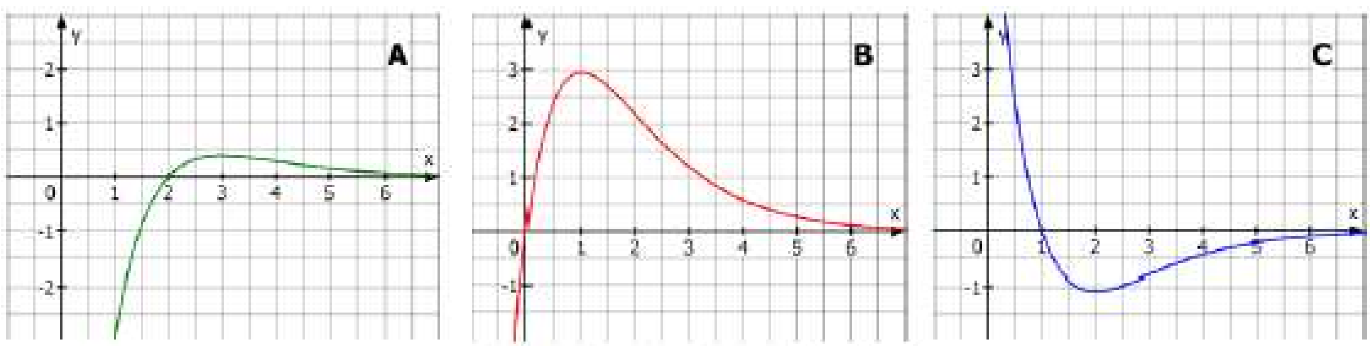
Berechne das folgende Integrale exakt (dabei ist x reell):

$$\int_0^{1/4} 2e^{4x}\,dx$$

**Hier suchen wir zu f(x)=2e$^{4x}$ eine Stammfunktion F(x). Als Tipp beginnen wir mit f(x) selbst, aber beim Ableiten hüpft die 4 nach vorne und daher muss F(x)=0,5e$^{4x}$ sein wegen 2/4=0,5. Nun ist das Integral F(1/4)-F(0) mit F(1/4)=0,5e und F(0)=0,5. Also I=0,5e-0,5.**

**3. Aufgabe** **(3 Punkte)**

Die drei Abbildungen zeigen die Graphen einer Funktion f und ihrer Ableitungen f‘ bzw. f‘‘. Ordne richtig zu und begründe deine Antwort kurz!




**f=B, f‘=C und f‘‘=A. B hat einen Hochpunkt bei x=1, was sich mit der Nullstelle und dem richtigen Vorzeichenwechseln von C deckt. C wiederum hat einen Tiefpunkt bei x=2, was für deren Ableitung eine Nulstelle bei x=2 erfordert. Diese besitzt aber gerade A und auch hier ist der VZW genau der richtige.**

**4. Aufgabe** **(3 Punkte)**

Löse das lineare Gleichungssytem in Matrixdarstellung und gib den Lösungsvektor **x** an:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & | & 3 \\ 1 & -2 & 2 & | & 7 \\ 3 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

**Man zieht vom Doppelten von (2) die erste Zeile ab und von (3) das 1,5fache von (1):**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & -7 & 2 & | & 11 \\ 0 & -3{,}5 & -4 & | & -4{,}5 \end{pmatrix}$$

**Nun haben wir noch den Eintrag -3,5 in der 3. Zeile zu killen. Um mit den Vorzeichen besser klar zu kommen, drehen wir dazu aber noch ALLE Vorzeichen in der dritten Zeile herum, was einem Multiplizieren mit -1 entspricht:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & -7 & 2 & | & 11 \\ 0 & 3{,}5 & 4 & | & 4{,}5 \end{pmatrix}$$

**Jetzt addieren wir zum Doppelten der dritten Zeiel die zweite hinzu und es ergibt sich:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & -7 & 2 & | & 11 \\ 0 & 0 & 10 & | & 20 \end{pmatrix}$$

**Wir können also $10x_3=20$ zu $x_3=2$ lösen.**

**Mit diesem Ergebnis gehen wir in die zweite Zeile. So soll $-7x_2+2x_3=11$ sein, was also $-7x_2+2\cdot 2=11$ bzw. $-7x_2=7$ entspricht. Das bedeutet aber $x_2=-1$.**

**Zuletzt wissen wir aus der ersten Zeile, dass $2x_1+3\cdot(-1)+2\cdot 2=3$ ist. Es ist also $2x_1=2$ bzw. $x_1=1$.**

**Insgesamt finden wir den Lösungsvektor x=(1,-1,2), was man eigentlich untereinander schreibt, aber das geht hier nicht ;-)**

**5. Aufgabe** **(3 Punkte)**

Angenommen, dir liegt eine Ebene in Normalenform und eine Gerade in Parameterform vor. Beschreibe ein Verfahren, mit dem du entscheiden kannst, ob die Gerade in der Ebene liegt.

**Ich bilde das Skalarprodukt aus dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Gerade. Wenn nicht Null herauskommt, sind die beiden Vektoren nicht senkrecht und es liegt ein einfacher Schnitt vor. Die Gerade liegt damit NICHT in der Ebene.**

**Wenn aber Null herauskommt, sind Ebene und Gerade parallel. Nun kann man mit einer einfachen Punktprobe entscheiden, ob die Gerade in der Ebene liegt. Denn ist ein Punkt der Geraden auch Punkt der Ebene, so sind es alle Punkte der Geraden!**

**6. Aufgabe** **(2 Punkte)**

Entscheide, ob sich die folgenden beiden Ebenen E1 und E2 schneiden oder ob sie parallel liegen! E1: $2x_1+3x_2 - x_3 = 4$ und E2: $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$.

**Hier kann man über die Normalenvektoren gehen; $n_1=(2,3,-1)$ bzw. $n_2=(3,-2,1)$. Diese sind nicht Vielfache voneinander und so kommt es zu einem Schnitt, denn nur bei Vielfachen könnten die Ebenen parallel liegen.**

**Alternativ gibt man die Gleichungen in eine Matrix im GTR ein und testet mit rref()!**

**7. Aufgabe** **(2 Punkte)**

Unter welchem Schnittwinkel schneiden sich die beiden Ebenen aus Aufgabe 7?

**Spätestens hier braucht man die Normalenvektoren (s.o.). Man braucht $n_1 \cdot n_2$ und $|n_1|$ bzw. $|n_2|$. Diese sind: $n_1 \cdot n_2=6-6-1=-1$; $|n_1|$=wurzel(14) bzw. $|n_2|$=wurzel(14). Damit ist nach der Formel (s. A8): $\cos(\alpha)=-1/14$. Mit dem GTR findet man (ACHTUNG: MODE auf DEGREE und 2nd+cos für $\cos^{-1}$) $\alpha \approx 94°$. Nun ist der Winkel 94° größer als 90°. In diesem Fall ist nach Definition der Gegenwinkel zu $\alpha$ bezogen auf 180° die richtige Lösung, also 86°. 94° ist aber auch richtig!**

**8. Aufgabe** **(2 Punkte)**

Angenommen, man möchte den Schnittwinkel $\propto$ einer Geraden und einer Ebene berechnen und kennt den Richtungsvektor der Geraden $\vec{v}$ und den Normalenvektor der Ebene $\vec{n}$. Kann man dann einfach die uns bekannte Formel

$$\cos(\propto) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

verwenden? Wenn nein, was muss man hier beachten?

**Das geht nicht ganz so einfach. Denn der Normalenvektor steht genau senkrecht auf der Ebene! Macht man sich eine Skizze, sieht man, dass man den Gegenwinkel bezogen auf 90° ausrechnet… Also kann man entweder 90°-$\alpha$ bestimmen oder den cos(…) durch sin(…) ersetzen, was aber etwas komplizierter ist.**

**9. Aufgabe** **(10 Punkte)**

Die Gerade g enthält die Punkte A(-2|4|3) und C(1|4|0). Die Gerade h trägt die Punkte F(2|3|4) und H(1|7|3).

a) Zeichne die beiden Geraden in ein geeignetes Koordinatensystem.

**Geht hier nicht so gut, also lass ich es. Denkt an die Beschriftungen und die Abstände der Einheiten!!! Einfach je die beiden Punkte einzeichnen und verbinden.**

b) Welche gegenseitige Lage haben g und h?

**Dazu sollte man die Geradengleichungen haben. Wir stellen g auf mit Aufpunkt A und Richtungsvektor CA (die Schreibweise ist aus Zeitgründen nicht so toll):**

**g: x=(-2,4,3)+t(3,0,-3) und h: x=(2,3,4)+s(-1,4,-1). Dabei sind t und s verschiedene Parameter!**

**Nun muss man schauen, ob ein Schnitt vorliegt und kann das ganze entweder mit dem GTR ausrechnen lassen oder per Hand schauen. Für einen Schnitt muss es ein Paar t,s geben, welches für alle drei Zeilen die jeweilige Gleichung erfüllt! Diese sind:**

**-2+3t=2-s bzw. 4=3+4s bzw. 3-3t=4-s.**

**Die zweite Zeile/Gleichung ist die einfachste: Um sie zu erfüllen, MUSS 4s=1 sein bzw. s=1/4.**

**Dann MUSS aber in der ersten Gleichung t=5/4 sein, denn -2+3t=2-1/4 ist gleichbedeutend mit 3t=4-1/4=15/4 bzw. t=15/12=5/4.**

**Jetzt MUSS aber die letzte Gleichung für t=5/4 UND s=1/4 gelten. Testen wir das: 3-15/4=-6/4 ist aber nicht 4-1/4=7/4! Widerspruch und die beiden Geraden schneiden sich schon einmal nicht. Da die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind, sind die beiden Geraden WINDSCHIEF.**

c) Wieso haben die Punkte der Geraden g die Struktur P(-2+t|4|3-t)? Welche Struktur haben die Punkte der Geraden h?

**Das liegt daran, dass man die Geradengleichung von g sortieren kann. Für x1 muss ja -2+3t gelten, x2 ist immer 4 und x3=3-3t. Das ist nicht genau das, was oben steht. Ehrlich gesagt hätte ich besser 3t oben hingeschrieben, aber gut, so kann man das auch mal besprechen.**

**Gehen wir einen Schritt zurück und schauen uns die Geradengleichung von g an: x=(-2,4,3)+t(3,0,-3) kann man auch als g: x=(-2,4,3)+r(1,0,-1) notieren. denn (3,0,3) ist einfach dreimal der Vektor (1,0,-1) und so kann man die 3 auch „rausziehen". Dann erklärt sich die Struktur von P. Die Gerade h hat diese Struktur: Q(2-s|3+4s|4-s).**

d) Bestimme einen Vektor $\vec{v}$, der senkrecht zu den Richtungsvektoren von g und h steht.

**Das ist Fleißarbeit; einmal muss v senkrecht auf (3,0,-3) bzw. einfacher (1,0,1) stehen UND senkrecht auf dem Richungsvektor von h, also (-1,4,-1). Mit Skalarprodukten findet man dann:**

**0=(1,0,-1)·(a,b,c)=a-c, also a=c. Dabei sind a,b,c die drei Einträge des Vektors v.**

**0=(-1,4,-1)·(a,b,c)=-a+4b-c. Wir wissen schon, dass c=a ist und ersetzen c durch a: 0=-a+4b-a=-2a+4b bzw. 2a=4b bzw. b=a/2. Wir haben also v=(a,a/2,a), wobei wir a völlig frei (außer 0) wählen können. Nehmen wir a=1, erhalten wir v=(1,1/2,1).**

e) Bestimme eine Gerade f, die sowohl zu g als auch zu h orthogonal steht und dabei beide Geraden schneidet. Wie lauten die Schnittpunkte?

**Das ist eine schwere Teilaufgabe und es gibt mehrere Lösungswege. Hier ist einer: Wir vergessen einmal Teilaufgabe d) und erinnern uns an c) zurück. Da haben wir die Struktur der Punkte von g bzw. der von h bestimmt zu:**

**P(-2+t|4|3-t) bzw. Q(2-s|3+4s|4-s).**

**Nun stellen wir den Verbindungsvektor PQ auf. Er lautet:**

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 2-s+2-t \\ 3+4s-4 \\ 4-s-3+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-s-t \\ -1+4s \\ 1-s+t \end{pmatrix}$$

**Dieser Verbindungsvektor ist im Moment völlig davon abhängig, welche Punkte P bzw. Q wir auf den Geraden wählen und daher stehen s und t auch in seinen Koordinaten!**

**Nun soll er aber senkrecht auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. auf $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ stehen. Das geht dann wieder wie in Aufgabenteil d):**

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-s-t \\ -1+4s \\ 1-s+t \end{pmatrix} = (4-s-t) + 0 - (1-s+t) = 3-2t \quad bzw. \quad t = 1,5.$$

**Damit das also was werden kann, muss der Punkt P auf der Geraden g durch t=1,5 bestimmt sein. Den kann man schon ausrechnen: P(-2+1,5|4|3-1,5) ergibt den Punkt P(-0,5|4|1,5).**

**Und unser ganz allgemeiner Verbindungsvektor wird etwas einfacher:**

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 4-s-1,5 \\ -1+4s \\ 1-s+1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5-s \\ -1+4s \\ 2,5-s \end{pmatrix}$$

**Immer noch haben wir kein s gefunden! Doch soll der Verbindungsvektor ja auch senkrecht auf (-1,4,-1) stehen, also:**

$$0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5-s \\ -1+4s \\ 2,5-s \end{pmatrix} = -2,5+s-4+16s-2,5+s = 18s-9$$

**und es findet sich aus 18s-9=0 eben s=1/2.**

**Also ist der Punkt Q mit s=1/2 bei Q(2-1/2|3+2|4-1/2)=Q(1,5|5|3,5) zu suchen. Wir haben insgesamt zwei Punkte bestimmt, die auf den beiden Geraden liegen und deren Verbindungsvektor ist mit s=1/2 schließlich:**

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 2,5-s \\ -1+4s \\ 2,5-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5-0,5 \\ -1+2 \\ 2,5-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Das ist auch richtig, wenn man die beiden Punkte P und Q jetzt direkt vergleicht: P hat ja die Koordinaten P(-0,5|4|1,5) bzw. Q hat Q(1,5|5|3,5).**

**Der Richtungsvektor (2,1,2) ist tollerweise das Doppelte des Richtungsvektors v aus Aufgabenteil d) und so muss die Gerade, die durch die beiden Punkte P und Q geht, wirklich auf beiden Geraden senkrecht stehen! Man notiert die Gerade f**

**beispielsweise zu f: x=(1,5|5|3,5)+t(2,1,2). Dabei wurde mal Q als Aufpunkt gewählt, P geht natürlich auch!**