EI M5 2011-12	MATHEMATIK (3+2). Klausur – Lösung

1. Aufgabe **(2 Punkte)**

Bilde die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^{\sin(x)}$ für reelle Zahlen x.

Dies ist eine Verkettung von e-Funktion und sin(x). Also Kettenregel mit $u=e^v$ mit $v=\sin(x)$ und mit $u'=e^v$ und $v'=\cos(x)$. $f'=u' \cdot v'$ und damit ist $f'=e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$.

2. Aufgabe **(2 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x)=(2x-2)^3$ für reelles x.

a) Gib eine Stammfunktion F(x) für f(x) an.

Erster Tipp: $F(x)=(2x-2)^4$. F' ist aber $8(2x-2)^3$, denn die 4 kommt von oben runter und die 2 hüpft wegen der Verkettung aus der Klammer. Macht 8.

Wir korrigieren daher mit 1/8: $F(x)=1/8\cdot(2x-2)^4$.

b) Gib die Stammfunktion F*(x) von f(x) an mit F(1)=5.

Unsere Lösung aus a) hat bei x=1 den Wert $F(1)=1/8\cdot(2\cdot1-2)^4=1/8\cdot0^4=1/8\cdot0=0$. Das ist nicht 5! Also addieren wir die Konstante 5 zu F dazu (was an F' nichts verändert, denn die Konstante 5 verschwindet wieder beim Ableiten) und so ist $F^*(x)=1/8\cdot(2x-2)^4+5$.

Zusatzaufgabe **(3 Punkte)**

Gib alle reellen Werte x an, welche die folgende Gleichung lösen.

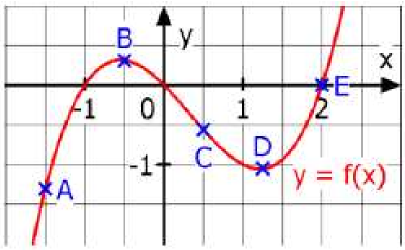
$$e^x + 2e^{-x} = 3$$

Hier muss man e^x durch u substituieren! Dabei ist zu beachten, dass $e^{-x}=1/e^x$ und damit 1/u ist. Also erhalten wir u+2/u=3. Das ist ein „alter Hut". Wir multiplizieren mit u durch (kann nicht Null sein, denn u ist e^x und die e-Funktion ist immer größer Null, aber das nur am Rande) und finden $u^2+2=3u$. Jetzt 3u auf die linke Seite, sortieren und die pq-Formel oder die abc-Formel drauf loslassen:

$u^2-3u+2=0$ mit p=-3 und q=2 ist u_1 = 3/2+wurzel(9/4-2) = 1,5+wurzel(1/4) = 2, denn wurzel(1/4)=1/2! u_2 ist dann 1, da man die 1/2 von 1,5 abzieht.

Jetzt wird rücksubstituiert: $e^x=1$ liefert x=0 und $e^x=2$ liefert x=ln(2).

3. Aufgabe **(3 Punkte)**



Begründe kurz, ob folgende Aussagen zum obigen Schaubild richtig oder falsch sind:

a) f‵ ist bei Punkt A negativ.

f‵ ist die Steigung von f. Hier steigt die Kurve, also muss f‵>0 sein! a) ist falsch.

b) f‶ ist bei Punkt B positiv.

f‶ ist die Kurvenkrümmung. f‶ ist bei Tiefpunkten positiv (=Linkskurve), hier ist es aber ein Hochpunkt. Falsch!

c) f‵ ist -1 beim Punkt C.

Stimmt! Legt man ein Lineal an, sieht man, dass die Tangente mit der Regel „1 rüber eins runter" entsteht, was der Steigung 1/1=1 entspricht.

d) f‵ hat beim x-Wert von D eine Nullstelle.

Stimmt! Denn bei D haben wir einen Extrempunkt und damit ist die Steigung 0. Die Steigung ist aber f‵ und damit muss f‵=0 sein, was einer Nullstelle entspricht.

e) f‶ ist bei E größer Null und f ist ab E monoton wachsend.

Richtig! Monoton wachsend ist korrekt, da die Funktionswerte immer weiter ansteigen. Und wie oben geschrieben bedeutet f‶>0 eine Linkskurve und die liegt hier vor!

4. Aufgabe **(4 Punkte)**

Löse das lineare Gleichungssytem in Matrixdarstellung und gib den Lösungsvektor **x** an:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 & | & 7 \\ 5 & -3 & -1 & | & -11 \\ 1 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Interpretiere das Gleichungssystem und die Lösung geometrisch.

Wir addieren die erste und die zweite Zeile und wir addieren die erste auf das 5fache der dritten Gleichung. Es ergibt sich dann:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 & | & 7 \\ 0 & -2 & -4 & | & -4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Hier kann man schon erkennen, dass die neu entstanden Gleichungen (4 und 5) in den Zeilen 2 und 3 Vielfache sind! Spätestens, wenn wir die beiden verarbeiten und zwar dadurch, dass wir zum Doppelten der 3.Zeile die 2.Zeile addieren, stoßen wir auf eine Nullzeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Was nun?! Wir haben dafür ein Verfahren gefunden, indem wir x_3=t setzen und in der 2. Zeile nach x_2 auflösen: -2x_2 – 4t = -4 bedeutet -2x_2 = -4+4t oder x_2=2-2t. Mit dieser Zwischenlösung und eben mit x_3=t gehen wir in die erste Zeile und bestimmen x_1: -5x_1+(2-2t)-3t = 7 bedeutet -5x_1+2-5t = 7 oder -5x_1 = 5+5t. Teilt man noch durch -5, erhält man x_1=-1-t. Nun ist das t immer noch frei wählbar und so haben wir unendlich viele Lösungen, die auf einer Geraden liegen, denn der Lösungsvektor schreibt sich ja so:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1-t \\ 2-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \text{ reell.}$$

Dabei haben wir „nur" nach Zahl bzw. nach Vielfachen von t sortiert…

Diese Lösung entspricht also einer Geraden. Das Gleichungssystem in der Version mit der Nullzeile entspricht einem Schnitt zweier Ebenen (in Koordinatenform). Mehr meint die (wirklich etwas blöde) Frage nicht… In der Startversion hat das LGS drei verschiedene Ebenen, die aber eben auch alle durch die obige (Schnitt-)Gerade gehen.

5. Aufgabe **(3 Punkte)**

Beschreibe ein Verfahren, mit dem sich der Abstand einer Geraden von einer Ebene bestimmen lässt, wenn sie keine gemeinsamen Punkte haben.

Kein Schnittpunkt = Parallel oder die Gerade liegt in der Ebene. Kein gemeinsamer Punkt muss Parallelität bedeuten, weil sonst wären ja alle Punkte der Geraden mit der Ebene gemeinsam!

Um den Abstand zu bestimmen, kann man daher IRGENDEINEN Punkt der Geraden nehmen. Dann mit dem Normalenvektor eine Gerade durch diesen Punkt. Diese Gerade mit der Ebene schneiden. Der Abstand des so gefundenen Schnittpunkts mit dem ausgewählten Geradenpunkt ist bereits der Abstand (Ebene, Gerade)!

6. Aufgabe **(2 Punkte)**

Gegeben sind die Ebene

$$E: \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = 0$$

und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass *E* und *g* parallel zueinander liegen.

Parallel bedeutet, dass der Normalenvektor SENKRECHT auf dem Richtungsvektor von g liegen muss. Dazu muss das Skalarprodukt der beiden Null werden und das ist der Fall: $8\cdot 1-1\cdot(-4)-4\cdot 1=8-4-4=0$.

b) Gib eine Gerade *h* an, welche ganz in *E* enthalten ist. *Tipp: Schreibe g um!*

h ist dann ja auch „parallel" zu E, nur dass der Aufpunkt in der Ebene liegen muss. Wir „verlegen" daher g, indem wir den eigentlichen Aufpunkt (7,5,-7) durch den Aufpunkt der Ebene, (-1,4,-3) ersetzen und notieren h:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ mit reellem } t.$$

7. Aufgabe **(2 Punkte)**

In der Formelsammlung von Klett findet man folgende Formel für den Schnittwinkel $\propto$ einer Geraden (mit Richtungsvektor $\vec{v}$) und einer Ebenen (mit Normalenvektor $\vec{n}$):

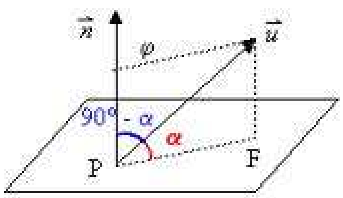
$$\sin(\propto) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\,\vec{v}\,|\cdot|\,\vec{n}\,|}$$

Wieso wäre hier $\cos(\propto)$ nicht richtig und wieso ist $\sin(\propto)$ korrekt? *Tipp: $\sin(90°-\propto)=\cos(\propto)$.*

Das Problem ist, dass man mit dem Skalarprodukt und der cos-Formel immer den eingeschlossenen Winkel zwischen zwei Vektoren erhält.

Nun ist der Winkel zwischen v und n eigentlich gar nicht gefragt! Es geht vielmehr um den Winkel zwischen v und einem Vektor, der in der Ebene verschiebt! n wiederum ist einfach um 90° dazu verdreht, da n senkrecht auf E steht.

Man muss also entweder nach Anwenden der cos-Formel den passenden Gegenwinkel zu 90° finden oder man kann wegen des Tipps den Sinus nutzen! Hier eine Skizze, wobei v hier mit u bezeichnet wird:



Durch cos würde man den blauen Winkel (90-alpha) erhalten, wir suchen aber den roten Winkel (alpha selbst).

8. Aufgabe **(12 Punkte)**

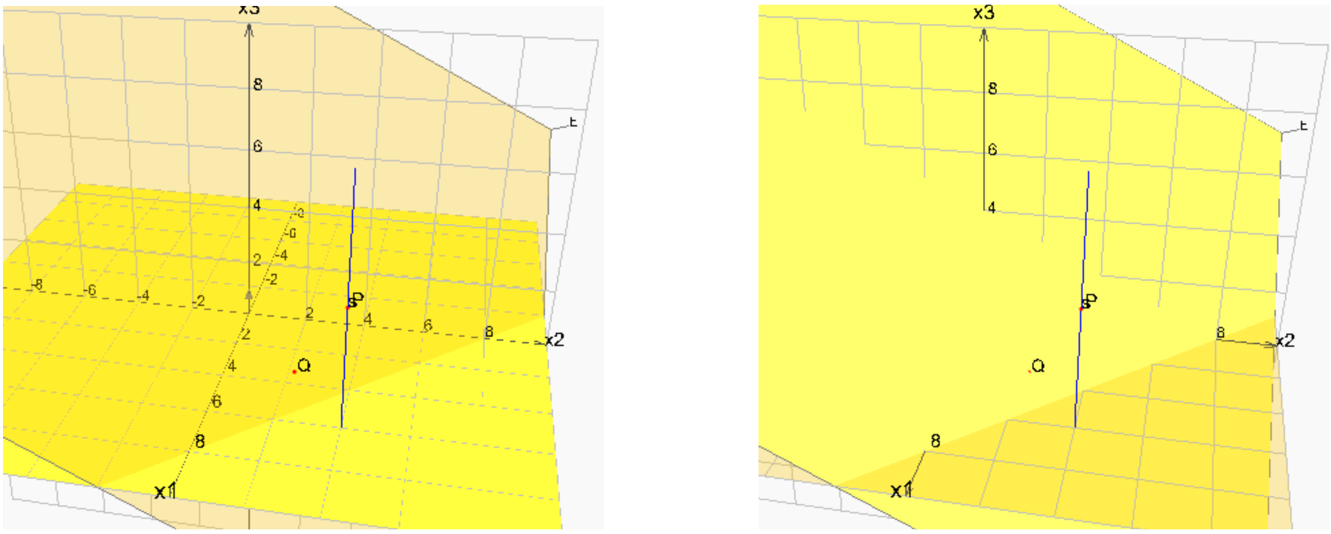
Die Ebene E: $x_1+x_2+2x_3=8$ stellt für $x_3\geq 0$ einen Hang dar, der in die x_1x_2-Ebene übergeht. Im Punkt H(6|4|0) steht ein 80m hoher Sendemast senkrecht zur x_1x_2-Ebene (1 LE entspricht 10m).

a) Zeichne den Hang und den Sendemast in ein geeignetes Koordinatensystem.

a) und b) erledigen wir in einem Aufwasch…

b) Weise nach, dass der Sendemast nicht mehr auf dem Hang steht, sondern bereits auf der x_1x_2-Ebene.

In der Skizze unten ist auf der linken Seite der Hang „durchscheinend" dargestellt, in der rechten Abbildung ist der Hang „massiv"; so kann man sich das alles vielleicht besser vorstellen. Der Sendemast ist bereits eingetragen (eine Einheit auf den Achsen entspricht 10m; er ist 80m hoch) und man erkennt, dass er außerhalb des Hangs liegt (genauer etwas unter 10m von der Kante entfernt).



c) Bestimme den Neigungswinkel des Hanges.

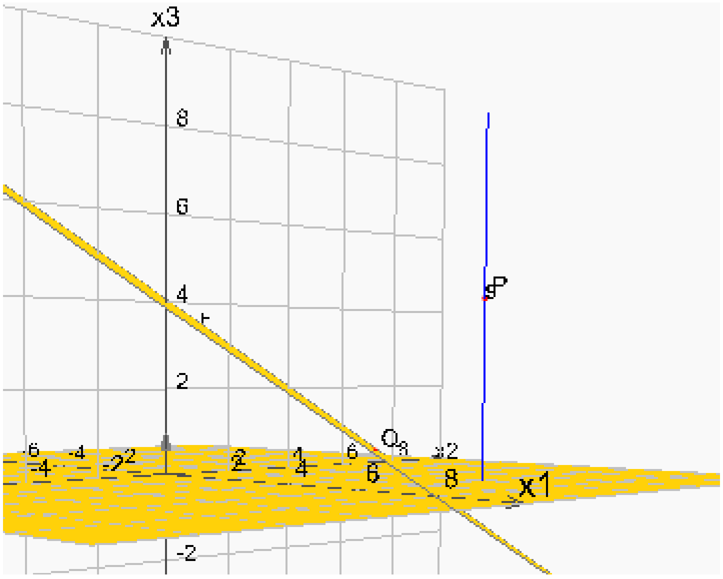
Den Neigungswinkel bestimmen wir mit der cos-Formel über das Skalarprodukt der Hang-Ebene und der x1x2-Ebene. Dazu brauchen wir beide Normalenvektoren! Ohne viel Mühe liest man aus der Koordinatendarstellung der Ebene (1,1,2) ab (einfach die Koeffizienten vor x1-x3) und auch die x1x2-Ebene hat mit (0,0,1) einen einfachen Normalenvektor. Damit lautet die Formel wie folgt:

$$\cos(\propto) = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot 1} \approx 0.8165,$$

was mit dem GTR berechnet einem Winkel von ca. 35° entspricht. Dabei achtet man darauf, dass im MODE das DEGREE und nicht das RADIAN ausgewählt wurde.

d) Der Sendemast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert. Bestimme die Länge des Stahlseils.

Hier hilft eine wirklich gute Skizze oder dass man sich mit Papier und Bleistift Hang und Mast verdeutlicht! Hier eine Skizze:



Sie zeigt den Hang von einer seitlichen Perspektive. Dass das Seil möglichst kurz sein soll, bedeutet, dass der Punkt des Hangs, nennen wir ihn H, möglichst nah an P liegen soll. Dann ist der Abstand HP aber gerade der Abstand der Ebene zur Geraden und genau den müssten wir jetzt berechnen!!!

Das ist eine fiese Sache, denn man kann sich schnell verrechnen oder aber man benutzt eine ungeschickte Darstellung der Ebene…

Zuerst bauen wir uns die Hilfsgerade g mit Aufpunkt P(6|4|4), denn der Punkt P ist genau auf halber Höhe von 8, also bei 4, und dem Richtungsvektor n (=Normalenvektor der Ebene, also (1,1,2)). Die Hilfsgerade lautet dann:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit reellem } t.$$

Soweit sogut. Nun müssen wir den Schnittpunkt von g und E bestimmen. Dieser Punkt ist dann schon der Verankerungspunkt H. Denkt an den Witz mit dem Kühlschrank im Keller, so funktioniert Mathe!

Den Schnittpunkt errechnen wir am besten mit der Koordinatenform! Wir lesen die Gerade dazu zeilenweise aus: x1=6+t, x2=4+t und x3=4+2t und setzen diese Bedingungen in die Koordinatenform der Ebene ein:

E: x1+x2+2x3=8 wird zu (6+t)+(4+t)+2(4+2t)=8 und links zusammengefasst steht 18+6t=8 da bzw. 6t=-10 bzw. t=-10/6=-5/3≈-1,67. Den Schnittpunkt H findet man, wenn man in der Gleichung der Hilfsgeraden g das t durch -5/3 ersetzt! Wir finden dann den Punkt H ungefähr bei H(4.33|2.33|0.67). Der Abstand von H zu P ist unsere Seillänge und die wäre etwa 4.1, was 41 Metern entspricht.

e) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt K(6|4|?) ab und trifft dabei den Hang im Punkt R(4|0|2). Bestimme die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist.

Auch hier braucht man eine gute Idee! Ein richtiger Ansatz ist folgender: Wenn der Mast auf ? Metern Höhe abknickt, dann knicken 80 Meter minus ? Meter ab. Dieser „Abknick“ reicht offensichtlich genau, um bis zu dem Punkt R zu kommen. Also

muss der Abstand des Punktes R zum Knickpunkt K genau 80-x entsprechen (wir haben ? durch x ersetzt, das ist vertrauter). Wir rechnen mal den Abstand RK aus:

$$\sqrt{(6-4)^2+(4-0)^2+(x-2)^2}=\sqrt{2^2+4^2+(x-2)^2}=\sqrt{20+(x-2)^2}$$

Was hat das nun gebracht?! Wir wissen ja noch nicht, was x genau ist! Trotzdem findet man eine Lösung, wenn man nun die zweite Idee umsetzt: Dieser Abstand, $\sqrt{20+(x-2)^2}$, entspricht genau der Länge des abgeknickten Mastes und das sind 80 Meter minus ? Meter bzw. in Kurznotation (1 Einheit = 10 Meter) 8-x:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{20+(x-2)^2}=8-x && \mid\ (\ldots)^2\\
&20+(x-2)^2=(8-x)^2 && \mid\ \textit{binomische Formel}\ \ldots\\
&20+(x^2-4x+4)=(64-16x+x^2) && \mid\ \textit{sortieren, kürzen}, \ldots
\end{aligned}$$

Und wir erhalten 12x=40 bzw. x=40/12≈3.33. Der Mast knickt also auf 33 Metern Höhe ab.