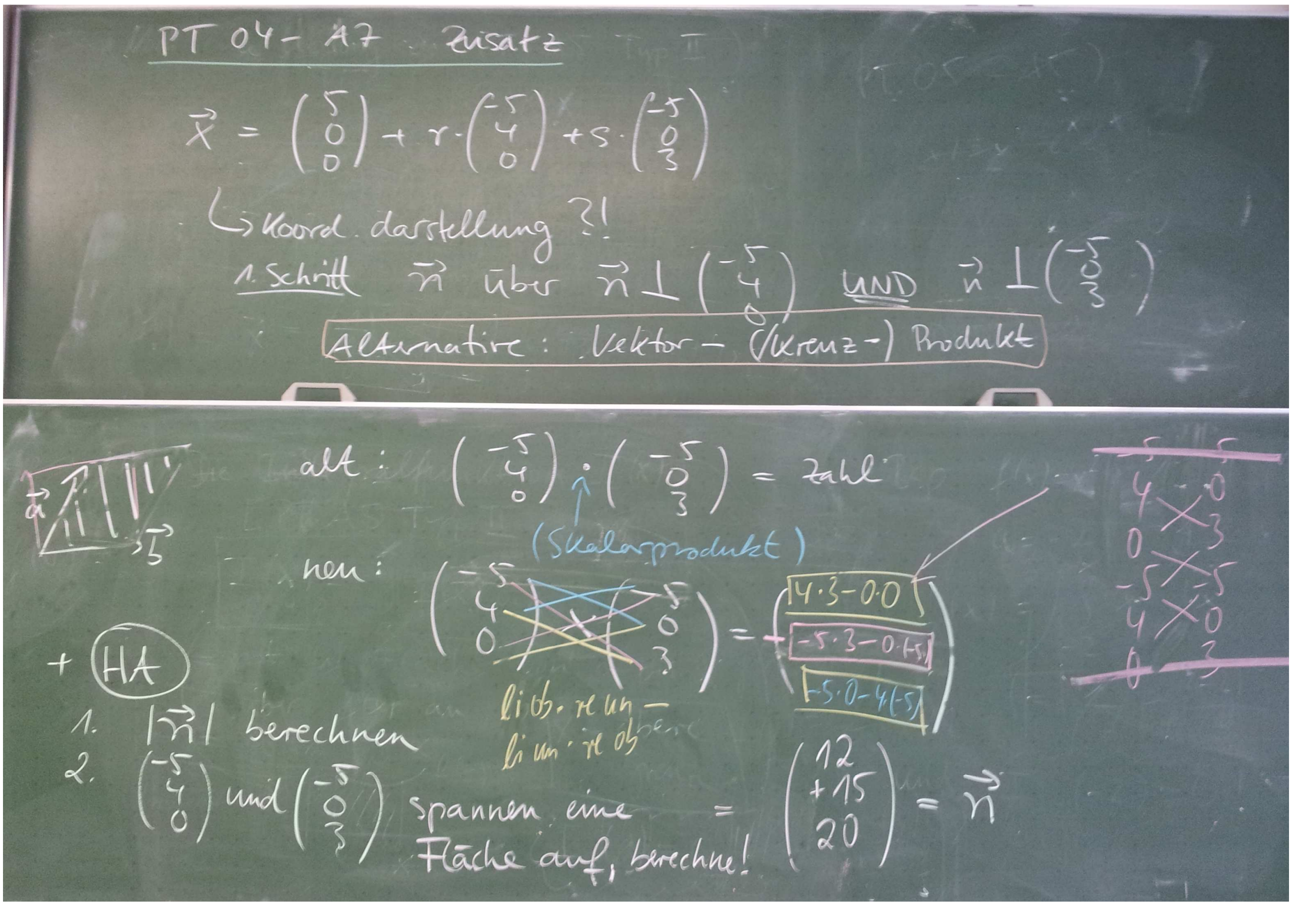
EI M5 2011-12	*MATHEMATIK* **Vektorprodukt**	**a x b** **steht senkrecht auf** **a und auf b**

Das Vektorprodukt ist wird theoretisch nicht in der Schule, sondern erst in der Uni untersucht wird. Das liegt daran, dass man um es richtig zu verstehen, sich mit Multilinearformen, Lie-Algebren usw. rumschlagen muss. Warum es trotzdem ein Arbeitsplatz dazu gibt, liegt daran, dass ihr es sehr wohl benutzen könnt. Es ist in zweierlei Hinsicht praktisch: **1. beim Aufstellen eines Normalenvektors auf zwei Vektoren** und **2. beim Berechnen von Flächen, die von zwei Vektoren aufgespannt werden**. Ihr braucht es aber nicht!

Beispiel aus dem Unterricht (alternativ: Buch S.303 mit Beispielen und Aufgaben)

Im Unterricht hatten wir wie so oft die Aufgabe, eine Parameterdarstellung der Ebene in die Normalengleichung umzuformen. Dazu nutzen wir jetzt das Vektorprodukt, das wie oben angedeutet, vom Himmel fällt (Nutzen auf Kosten von Verständnis, was leider in der Schulmathe sehr oft anzutreffen ist ☹).



Und so geht's:

$$\text{Senkrecht auf } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und auf } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}:$$

Du machst jetzt ein „Kreuzprodukt" (vielleicht daher der Name), was im Bild oben angedeutet ist.

Das Ergebnis des Kreuzprodukts ist wieder ein Vektor und in diesem stehen je Zeile diese Einträge:

x_1-Zeile: $[\ 4\cdot 3 - 0\cdot 0\ ]$
x_2-Zeile: $\mathbf{(-1)} \cdot [\ (-5)\cdot 3 - 0\cdot(-5)\ ]$
x_3-Zeile: $[\ (-5)\cdot 0 - 4\cdot(-5)\ ]$

In den Klammern stehen diese Einträge:

in der x_1-Zeile stehen x_2 aus dem ersten Vektor mit x_3 aus dem zweiten Vektor MINUS x_3 aus dem ersten Vektor mit x_2 aus dem zweiten Vektor. Das ist das „gekreuzte" an der Sache, wobei die x_1-Achse sozusagen „gestrichen" ist.

Dieses „Gekreuzte" wiederholt sich in der 2. Zeile: In der dortigen Klammer steht x1 vom ersten Vektor mit x3 aus dem zweiten Vektor MINUS x3 vom ersten mit x1 aus dem zweiten Vektor.

In der x_3-Zeile haben wir dann x_1 mal x_2 bzw. x_2 mal x_1…

Wie du bemerkt hast, gibt es noch ein Minuszeichen (gelb unterlegt) in der 2. Zeile. Das verstehen können wir leider nicht, da uns dazu die Algebra fehlt. Das ist einfach so…

Insgesamt finden wir dadurch:

$$\begin{pmatrix} 12-0 \\ -(-15-0) \\ 0-(-20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Dabei muss man etwas mit den Vorzeichen aufpassen!

Wir kontrollieren unser Ergebnis. Wir wollten ja, dass der neue Vektor senkrecht auf den beiden Vektoren vom Anfang steht:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ senkrecht auf } \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

Dann muss das Skalarprodukt Null sein: (12 mal -5) plus (15 mal 4) plus (20 mal 0), was gerade -60+60+0=0, passt!

Testen wir die andere Vorgabe:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ senkrecht auf } \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}:$$

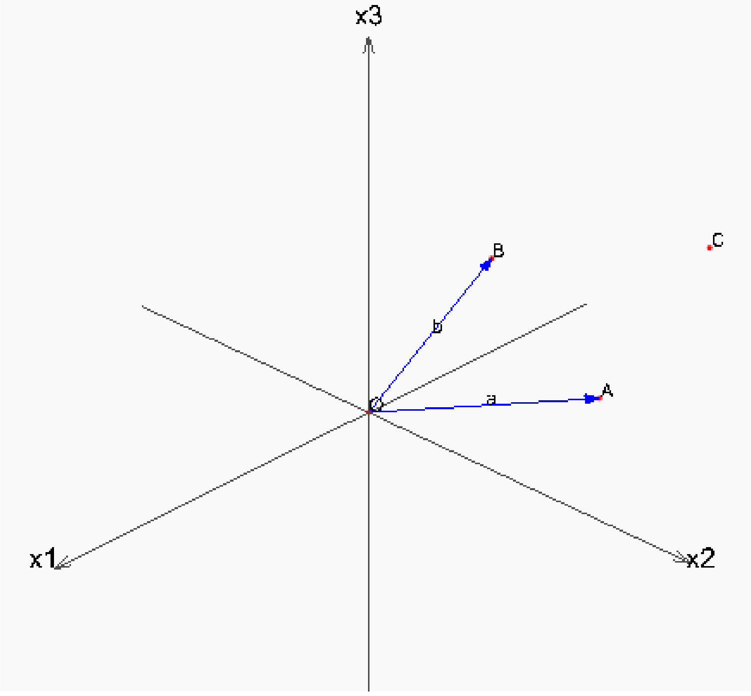
Das klappt auch, denn (12 mal -5) ist -60, (15 mal 0) ist 0 und (20 mal 3) ist 60. Insgesamt also -60+0+60 = 0.

Das ist ja schon mal ein erstes Resultat; **du kannst mit dem Skalarprodukt Normalenvektoren aufstellen**.

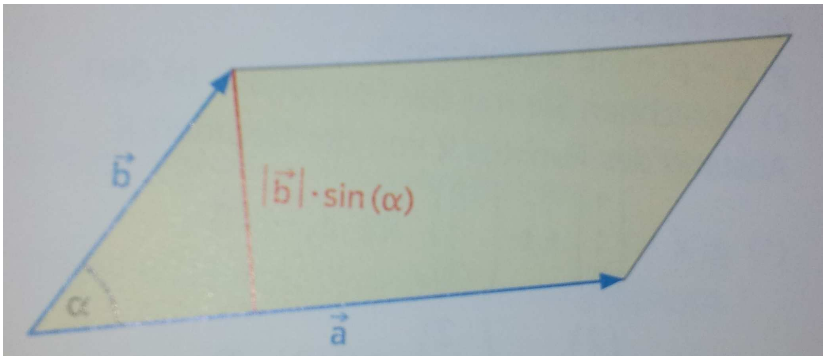
Aber dieser Vektor trägt **noch mehr Information** und die ist ggf. sehr nützlich. Berechnen wir mal den Betrag des Vektors:

wurzel($12^2+15^2+20^2$) = wurzel(144+225+400) = wurzel(769). Das ist etwa **27.5, merken wir uns das**. Denn wie wir gleich sehen werden, ist diese Zahl witzigerweise **der**

Flächeninhalt, den die beiden Vektoren zusammen aufspannen. Diese Fläche ist die einer Raute (spezielles 4-Eck) mit den Eckpunkten O(0|0|0), B(-5|0|3), A(-5|4|0) und C. C ist der Punkt, den man durch Addition der beiden Vektoren a und b erreicht, also C(-10|4|3). Dazu diese Abbildung:



Und hier besser zu sehen, die Raute mit gelbem Flächeninhalt:



Diese Fläche kann man per Hand ausrechnen und das machen wir mal. Dazu berechnen wir die Beträge der Kanten, die entweder Betrag(a) oder Betrag(b) lang sind mit:

$\text{Betrag von } b = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$: wurzel(25+0+9) = wurzel(34), was ca. 5.8 ist.

$\text{Betrag von } a = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$: wurzel(25+16) = wurzel(41), was ca. 6.4 ist.

Die Fläche der Raute bekommen wir über den Winkel zwischen den beiden Vektoren (s. Foto aus dem Schulbuch). Denn wir ziehen gedanklich den roten, senkrechten Strich vom Punkt B und schneiden dann das linke Dreieck ab und kleben es rechts wieder an. So entsteht ein Rechteck mit Breite |a|=6,4 und der Höhe h=sin(α)·5.8. Den Winkel bekommen wir über unsere „Winkelformel":

$\cos(\propto) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{(-5)\cdot(-5)+0\cdot 4+3\cdot 0)}{6.4\cdot 5.8} \approx 0{,}67$. Das entspricht $\boldsymbol{\alpha}$≈48°.

Für die Raute können wir jetzt 6.4 mal sin(48°) mal 5.8 = 6.4 mal 0.74 mal 5.8, was etwa 27.5 gerundet ist. Und das ist gerade der Betrag unseres Normalenvektors. Wenn man alle Rechnungen exakt ausführt, stimmen die Werte auch exakt überein. Abweichungen produziert nur der GTR.

Wird der Normalenvektor auf zwei Vektoren per Vektorprodukt berechnet, so ist der Betrag des Normalenvektors gerade der Flächeninhalt der von den beiden Vektoren aufgespannten Raute.

Braucht man übrigens nur das Dreieck OAB (was in den Abi-Aufgaben häufiger vorkommt), dann halbiert man diesen Wert, denn das Dreieck ist ja gerade die Hälfte der Raute…