EI 9a 2011-12	MATHEMATIK AB – Potenzrechenregeln – Lösung	$3^{-2} = \frac{1}{9}$

1. Aufgabe – Nur 10er-Potenzen…
Notiere in Hochschreibweise!

a) – 0,001 b) 0,0375 c) 100000 d) 18495700

Zu a): -10^{-3} oder $-1\cdot10^{-3}$. Der Faktor 1 vorne tut ja nix ;-)

Zu b): $3{,}75\cdot10^{-2}$. Das ist die Standardnotation; immer x,yz… mal 10 hoch!

Zu c): 10^5 oder $1\cdot10^5$.

Zu d): Das ist in Hochschreibweise nicht wirklich schöner, aber egal: $1{,}84957\cdot10^7$.

2. Aufgabe – Nur Kommazahlen…
Schreibe als Dezimalzahl!

a) 10^{-4} b) $123\cdot10^{-4}$ c) $-0{,}135\cdot10^4$

Zu a): 0,0001.

Zu b): 0,0123. Im Endeffekt kannst du dir erst 10^{-4} als 0,0001 notieren (siehe a)!) und dann mal 123 nehmen!

Zu c): -1350. Denn 10^4 ist 10000!

3. Aufgabe – Mischmasch
Vereinfache!

a) $9{,}23\cdot10^4 - 0{,}032\cdot10^6$ b) $123\cdot10^{-4}+0{,}02$ c) $-0{,}135\cdot10^4+301$

Zu a): Wir bringen beides auf 10^4, denn dann kann man die Zahlen vor der 10er-Potenz zusammenaddieren: $0{,}032\cdot10^6=3{,}2\cdot10^4$ und damit ist das Ergebnis einfach $12{,}43\cdot10^4$ oder $1{,}243\cdot10^5$.

Zu b): Der erste Summand ist 0,0123 (siehe letzte Aufgabe), also 0,0323.

Zu c): -1350+301=-1049.

4. Aufgabe
Vereinfache!

a) $10^4\cdot10^6$ b)$10^{-4}\cdot2000$ c) $\frac{6x^2y^3}{2x^2y^5}$

Zu a): 10^{10}, denn bei gleicher Basis UND einem Malpunkt addieren sich die Hochzahlen: 4+6=10.

Zu b): 2000 ist $2\cdot1000$ oder $2\cdot10^3$. Also haben wir $10^{-4}\cdot2\cdot10^3 = 2\cdot10^{3-4} = 2\cdot10^{-1} = 2\cdot0{,}1=0{,}2$.

Zu c): Oben finden wir x^2, unten auch. Das kürzt sich! Oben 6, unten 2 kürzt sich zu einer 3 oben (im Zähler). Unten sind 5 ypsilons, oben nur 3. Also bleiben unten 2 übrig. Insgesamt ist das also $3/y^2$!

5. Aufgabe
Vereinfache!

a) $3^4 + 9 \cdot 3^4$ b) 7^{-3} c) $3^4 \cdot 9^{-2}$ d) $4^4 \cdot 3^4$ e) $3^4 \cdot 2^3$

Zu a): Gleiche Basis, gleicher Exponent und ein Plus: Das geht! 3^4 ist ja $1\cdot3^4$ und damit ist der Ausdruck $10\cdot3^4$.

Zu b): Viel geht hier nicht; $1/7^3 = 1/343$ kann man notieren.

Zu c): Hier kann man tricksen; 3^4 ist ja $3\cdot3\cdot3\cdot3$ oder $(3\cdot3)\cdot(3\cdot3)$ bzw. einfach 9^2! Andererseits ist 9^{-2} gerade $1/9^2$. Man kann kürzen und übrig bleibt 1.

Zu d): Verschiedene Basis, aber gleiche Hochzahl. Dann kann man 12^4 notieren! Denn $3\cdot4=12$. Es ist ja egal, ob ich viermal den Faktor 4 verrechne und dann nochmal viermal den Faktor 3, oder gleich viermal $3\cdot4$…

Zu e): Hier geht nix! Verschiedene Basis, verschiedene Hochzahl, Pech gehabt! Allerhöchstens kann man $3^4=81$ und $2^3=8$ bestimmen und das multiplizieren.

6. Aufgabe – Neuerungen!
Überlege selbst! Was könnte das sein?

a) $(10^4)^2$ b) 0^0 c) $(-10^2)^3$ d) $9^{1/2}$

Zu a): Das $()^2$ bedeutet, es gibt zwei Päckchen je 10^4! Also $10^4\cdot10^4$, was wegen der Potenzrechenregeln 10^8 ist.

Zu b): Das könnte Null sein, ist aber in der Mathematik als 1 definiert. Komisch, macht aber Sinn, wenn man genauer in die Welt der Mathe schaut. Insgesamt ist immer $x^0=1$, egal was x ist! Das hatten wir bereits notiert.

Zu c): Hier hast du drei Päckchen zu je -10^2. Insgesamt sind das -10^6, denn du hast 3 Minuszeichen, was Minus bleibt und $10^2\cdot10^2\cdot10^2$, was 10^6 ist. Du kannst dir merken: Wird eine Hochzahl hoch eine 2.Hochzahl genommen, kannst du beide Hochzahlen multiplizieren! Diese Regel notieren wir noch!

Zu d): 3 oder -3. Denn hoch 1/2 ist hoch 0,5 und das hatten wir letztes Schuljahr. Macht auch Sinn, denn $9^{1/2}\cdot9^{1/2} = 9^{1/2+1/2} = 9^1=9$. Und -3 oder 3 lösen das!

7. Aufgabe – „Logarithmus" – umgedreht gedacht!
Ergänze richtig!

a) $2^x = 16$ b) $2 \cdot 5^x = 0{,}4$ c) $1{,}07^x = 2$ d) $2^x = 1000$

Zu a): 2 hoch 4 ist 16, also x=4.

Zu b): Wir teilen beide Seiten durch 2 und so muss 5^x=0,2 sein! 0,2 ist aber 1/5, was gerade 5^{-1} ist. Daher ist x=-1 die Lösung.

Zu c): Das können wir noch nicht: Man fragt sich hier, wie lange es dauert (=x), wenn man 7% Zuschlag je Rechenschritt bekommt (Verzinsung!), bis man sein Guthaben verdoppelt. Das geht mit der Log-Taste auf dem GTR. Machen wir noch!

Zu d): Gleiches wie in c), aber ungefähr 10. Probier es aus!

8. Aufgabe – Monster aus Buchstaben!
Vereinfache, so weit es geht und notiere dein Ergebnis OHNE Bruch!

a) $\dfrac{5 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{3^{-2}} \cdot 4 \cdot y^4 \cdot 4^y \cdot x^{-1} \cdot 4^{-x}}{20 \cdot x^3 \cdot 9 \cdot y^2 \cdot 4^{-2x} \cdot 3^{-y}}$ b) $\dfrac{-2 \cdot z^x \cdot \frac{x}{y^{-2}} \cdot y \cdot 2^{-4} \cdot z^4 \cdot z^{-x} \cdot 4^{-x}}{(-2)^3 \cdot y^2 \cdot z^{-2x} \cdot 3^{-z}}$

Zu a): Das sind Monster, aber man kann sie zähmen… Zuerst einmal sammeln wir im Zähler (=das was oben steht) und sortieren. Die „reinen" Zahlen sind 5 und 4, was 20 ergibt. Dann ist da noch $1/3^{-2}$, was 3^2 = 9 entspricht. Also 180. Dann sind da noch die 4er mit Hochzahlen, die kann man zu 4^{y-x} zusammenfassen! Die x-e fasst man zu $x^{4-1}=x^3$ zusammen und das y^4 steht alleine. Insgesamt ist also der Zähler dieses: $180 \cdot 4^{y-x} \cdot x^3 y^4$. Schon mal besser. Im Nenner schaut es ähnlich aus: Die reinen Zahlen sind 20 und 9, also auch 180. Die x-e sind alleine, also x^3, genauso das y^2. Dann haben wir noch das 4^{-2x} und das 3^{-y} alleine. Insgesamt kann man den Nenner zu $180 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot 4^{-2x} \cdot 3^{-y}$ notieren. Vergleicht man den Zähler mit dem Nenner, so kann man $180x^3$ kürzen! Außerdem noch y^4 gegen y^2 zu y^2 oben. Wir halten dieses Zwischenergebnis fest:

$$\frac{y^2 \cdot 4^{y-x}}{4^{-2x} \cdot 3^{-y}}$$

Das sieht schon viel besser aus! Es geht aber noch besser, denn die Hochzahlen im Nenner sind negativ und man kann daher „1 durch" dafür schreiben:

$$\frac{y^2 \cdot 4^{y-x}}{(1/4^{2x}) \cdot (1/3^y)}$$

Das sind aber jetzt Doppelbrüche und wir können sie auflösen, indem wir 4^{2x} und 3^y nach oben schreiben!!! Dann haben wir gar keinen Bruch mehr: $y^2 \cdot 4^{y-x} \cdot 4^{2x} \cdot 3^y$. Jetzt haben wir sogar nochmal eine gleiche Basis; die 4. Und da fassen wir das so zusammen: $4^{y-x} \cdot 4^{2x}=4^{y-x+2x}=4^{y+x}$ und finden als endgültige Lösung $y^2 \cdot 4^{y+x} \cdot 3^y$. Monster bezwungen!

Zu b): Mit dem gleichen Vorgehen wie in a) findest du dieses Ergebnis:

- **Zwischenergebnis Zähler: $-1/8 \cdot y^3 \cdot x \cdot z^4 \cdot 4^{-x}$.**

- **Zwischenergebnis Nenner: so wie es dasteht, nur dass $(-2)^3=8$ ist.**
- **Gesamtergebnis: $1/64 \cdot y \cdot x \cdot 4^{-x} \cdot 3^{z} \cdot z^{4+2x}$.**