EI 9a 2011-12	*MATHEMATIK* Probearbeit zur 2. Arbeit - Lösung	$\log_{10}(100)$ = 2

1. Aufgabe
Buch S. 72, A3

a) Da beide Male hoch 1/2 steht, können wir die Basen multiplizieren und haben 36 hoch 1/2, was gerade die Wurzel aus 36 bzw. die Zahl 6 ergibt.

b) Gleiches Spiel; wir fassen die Basen zusammen: 2 mal 4 ist 8 und $8^{1/3}$ ist die 3. Wurzel aus 8 oder die Zahl, die dreimal mit sich selbst malgenommen, 8 ergibt. Das ist die Zahl 2.

c) Wieder fassen wir die Basen zusammen: 3 mal 8 mal 6 ist 3 mal 48 oder 144. Jetzt sollen wir $144^{1/2}$ bzw. die Wurzel(144) berechnen und die ist 12.

d) Wieder dürfen wir zusammenfassen, da die Hochzahlen übereinstimmen. Wir haben unten also $4a \cdot 16a^2 = 64a^3$. Das „Hoch 1/3" bedeutet die 3. Wurzel und das ist 4a. Denn $(4a)^3 = 4a \cdot 4a \cdot 4a = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot a$ (einfach umsortiert) $= 64a^3$. Passt!

e) Das ist etwas fies, aber wieder können wir zusammenfassen (überall ist ja hoch 1/4). Wir müssen dann $2a^2 \cdot 4ab^3 \cdot 2ab$ rechnen. Das st $16a^4b^4$, denn 2 mal 4 mal 2 ist 16 und es gibt 4 Faktoren a und 4 Faktoren b. Daraus die 4. Wurzel (wegen dem „Hoch 1/4") ist 2ab, weil $2^4=16$.

2. Aufgabe
Buch S. 72, A5

a) $9^{1/3}$, weil die 3. Wurzel ist ja gerade „Hoch 1/3".

b) $(2^3)^{1/4} = 2^{3/4}$ (Weil „Hoch hoch" darfst du ja multiplizieren!)

c) $(5^2)^{1/3} = 5^{2/3}$

d) $1/3^{1/2} = 3^{-1/2}$

e) $6^{-1/3}$

f) $13^{-2/5}$

g) $a^{-3/4}$

h) $x\text{-}^{p/n}$

3. Aufgabe
Buch S. 72, Bist du sicher? A1

a) Gleiche Basis, Malpunkt dazwischen. Ich darf die Hochzahlen addieren! Also ist das ganze 3 hoch (1/4 + 2/3). Das ist etwas doof. Bringt man es auf 12tel, hat man 3/12+8/12 = 11/12 oder eben $3^{11/12}$. Nicht prima, aber ok.

b) Teilen bei gleicher Basis bedeutet ein Minus zwischen den beiden Hochzahlen. Also ist es 5 hoch (-2/5 – 3/4). Das ist wieder blöd. Man kann auf 20stel erweitern und hat dann -8/20 – 15/20 = -23/20.

c) Gleiche Basis, Malpunkt dazwischen, also x hoch -1/k + (-2/k), was aber $x^{-3/k}$ ist.

d) „Hoch hoch" bedeutet, dass man die Hochzahlen multipliziert. Dann hat man b hoch (1/4 mal -2/3). Die Hochzahl ist dann -2/12 oder -1/6 und wir haben $b^{-1/6}$.

e) Wir schreiben die 6. Wurzel aus a um zu $a^{1/6}$. Dann ist es wieder „hoch hoch" und wir multiplizieren 1/6 mit -3, was -1/2 ergibt; $a^{-1/2}$ ist die Lösung.

f) Der Ausdruck „1 durch 3. Wurzel(5)" ist erst einmal „1 durch $5^{1/3}$ ". Aber „1 durch ..." kann man auch immer durch eine negative Hochzahl ausdrücken. Wir schreiben also „1 durch $5^{1/3}$" um zu $5^{-1/3}$. Nun haben wir das ganze noch einmal hoch 2 zu nehmen. „Hoch hoch" meint aber Multiplizieren der Hochzahlen (hier -1/3 und 2) und so ergibt sich schließlich $5^{-2/3}$.

4. Aufgabe
Buch S. 72, A12

Bei Würfeln ist das Volumen ja wie bei allen Quadern „Höhe mal Tiefe mal Breite". Nur dass bei Würfeln noch Höhe=Tiefe=Breite gilt.

Nennen wir die uns noch unbekannte Höhe einfach mal h. Dann muss im ersten Fall $h^3 = 300\ cm^3$ sein. Wenn wir h haben wollen, müssen wir die 3. Wurzel aus $300\ cm^3$ ziehen bzw. 300 „hoch 1/3" nehmen. Das macht der GTR für uns. Er liefert ca. 6,7 (cm). Das ist also die Höhe des $300cm^3$-Würfels.

Bei den anderen beiden Würfeln geht die Rechnung ganz genauso und wir haben hier $h=120^{1/3}$ bzw. $h=60^{1/3}$ zu berechnen, was im ersten Fall ca. 4,9cm ist und im zweiten Fall 3,9 ergibt. Die Gesamthöhe der Würfel ist einfach die Summe aller Höhen, also 6,7cm + 4,9cm + 3,9cm, was gerundet 15,5cm ergibt.

5. Aufgabe
Buch S. 72, A13

a) Wir finden einen Fall, wo das nicht so ist: Angenommen, a=4 und n=1/2. Dann ist das Ergebnis 2, aber das ist kleiner als a=4. Es gäbe noch viele andere Gegenbeispiele; Wenn wir a=1/2 nehmen und n=2, dann ist $a^2=1/4$ wieder kleiner und nicht größer a=1/2.

b) Wir drehen das letzte Beispiel einfach um; die Wurzel aus 1/4, also hier n=2 und a=1/4 ist ja 1/2. Aber 1/2 ist ja mehr als 1/4. Stimmt wieder nicht!

6. Aufgabe
Buch S. 74, A26 (auf zwei Nachkommastellen runden reicht)

a) Man gibt dieses hier in den GTR ein: 2 ^ (3 ^ 0.5) ENTER. Das ergibt 3,32.

b) 5 ^ (6 ^ 0.5) ENTER ergibt 51,54.

c) (3/4) ^ (2 ^ 0.5) ENTER ergibt 0,67.

d) 0,28 ^ (7 ^ 0.33) ENTER ergibt 0,09. Dabei haben wir 1/3 mit 0,33 angenähert. Macht man das nicht, muss man noch Schlimmeres eingeben: 0,28 ^ (7 ^ (1/3)) und das ist schon ziemlich unübersichtlich.

e) 7 ^ (-2^0.5) ENTER ergibt 0,06.

f) Hier nutzen wir dann doch mal „Hoch hoch" aus und können so zu 3 hoch Wurzel(6) vereinfachen. Das ist dann 3 ^ (6 ^ 0.5) ENTER und ergibt 14,75.

g) (5 ^ 0.5) ^ (5 ^ 0.5) ENTER, was 6,05 ergibt.

Wem diese Eingaben zu lang / zu nervig sind, der kann immer Zwischenergebnisse berechnen und mit der ANS-Taste weiterverwenden. Am Beispiel g) geht man dann so vor:

g) ALTERNATIV: Berechne 5 ^ 0.5 ENTER, was auf dem Display 2,236… ergibt. Nun Drücke einfach „2nd" und die (-)-Taste und es erscheint ANS. Daraus machen wir ANS ^ ANS und schwupps haben wir das gleiche Ergebnis wie in g) oben.

7. Aufgabe
Buch S.76, A1a-d

a) x muss die 6. Wurzel aus 20 oder $20^{1/6}$ sein. Der GTR liefert dafür ca. 1,65.

b) Das geht gar nicht! Wegen der Hochzahl 6. Denn ist x positiv, dann ist x^6 auch positiv und sicher nicht -20. Ist x negativ, so fressen sich die (sechs) negativen Vorzeichen gegenseitig auf und wieder entsteht eine positive Zahl, die nie negativ sein kann.

c) x muss die 5. Wurzel aus 20 sein oder $20^{1/5}$. Der GTR liefert hier ca. 1,82.

d) Wird nix! Gleiches Argument wie in Aufgabenteil b)!

8. Aufgabe
Buch S. 78, A3

a) 3 hoch welche Zahl gibt 9^4? Naja, 3 hoch 2 gibt schon einmal 9. Aber 9^4 sind ja 4 Neuner miteinander multipliziert. Wir könnten also 3 hoch 8 testen und das klappt, denn wir fassen von den 8 Dreiern je 2 zu einer 9 zusammen und dann passt es. Einfacher geht es mit der Rechenregel auf S.78, denn wir suchen ja $\log_3(9^4) = 4\cdot\log_3(9) = 4\cdot 2 = 8$.

b) 10 hoch welche Hochzahl gibt $10^{1,5}$? Das muss 1,5 sein ☺ Weil dann stehts ja da!

c) 5 hoch welche Hochzahl gibt 125^{-2}? Das ist schwer, außer, man benutzt wieder die Rechenregel wie in a)! Denn $\log_5(125^{-2}) = -2\cdot\log_5(125)$ und wenn man weiß, dass $5^3=125$ ist, findet man also $-2\cdot3$ bzw. -6.

d) a hoch wieviel gibt a^3? Natürlich 3, denn a^3 ist ja a^3 ;-)

e) Auch hier muss es 200 sein!

f) Auch hier ist es einfach! 10 hoch wieviel ergibt 10 hoch -120? Natürlich -120.

9. Aufgabe
Buch S. 78, A4

a) $4^2=16$

b) $5^3=125$

c) $5^{-1}=0,2$ (das stimmt, denn $5^{-1} = 1/5^1 = 1/5 = 0,2$)

d) $(0,5)^3=1/8$ (das stimmt, denn $0,5=1/2$ und 1/2 hoch 3 ist $1/2\cdot1/2\cdot1/2 = 1/8$)

e) $(0,2)^2=0,04$ (das stimmt, denn $0,2 \cdot 0,2 = 2/10 \cdot 2/10 = 4/100 = 0,04$)

10. Aufgabe (mit GTR)
Buch S. 78, A8a

Wir suchen die Zahl x, für die gilt: $4^x=10$. Wir wissen, dass $4^2=16$ ist, also muss x kleiner als 2 sein. Andererseits ist $4^1=4$ und so muss $1<x<2$ sein. Probieren wir $x=1,5$, dann ist laut GTR $4^{1,5}=8$ (weil $4^{1,5} = 4^1 \cdot 4^{0,5} = 4 \cdot$Wurzel(4) $= 4 \cdot 2 = 8$). Das ist noch zuwenig, also gilt $1,5<x<2$. Wir probieren 1,75 und finden $4^{1,75}=11,31$ und das ist schon mehr als 10. Also muss $1,5<x<1,75$ gelten. Wir testen mal 1,6 und finden $4^{1,6}=9,2$, also liegt x zwischen 1,6 und 1,75. Für $4^{1,7}$ findet sich 10,56 und so wissen wir, dass x zwischen 1,6 und 1,7 liegt. Man könnte nun mit 1,65 zufrieden sein oder noch weiter ausprobieren.

11. Aufgabe
Buch S. 78, A9

a) $x=\log_2(3)$

b) $x=\log_2(1/3)$, was übrigens das gleiche wie $\log_2(3^{-1})$ sein muss und das ist nach der Rechenregel auf S.77 (lernen wir am Montag kennen) dann $-\log_2(3)$, also der negative Wert wie in a). Überprüfe mit dem GTR!

c) Es gibt kein x, was diese Gleichung erfüllen kann, denn keine Hochzahl kann negative Werte erzeugen!!!

d) Wieder soll das Ergebnis negativ sein und wieder geht es nicht!

e) Auch hier gibt es keine Lösung für x! Denn wenn x groß ist, dann ist 2 hoch x erst recht groß. Ist x sehr klein (nahe Null), dann ist 2 hoch x fast 1. Ist x=0 ist 2 hoch x genau 1. Ist x sehr negativ, dann ist 2 hoch x wiederum 1 durch 2 hoch eine große

positive Zahl. Erinnere dich; $2^{-10} = 1/2^{10}$ und wieder hat man Werte, die zwar fast, aber nie ganz Null werden!

f) 1 hoch irgendein Wert ist immer 1, aber nie 3!

12. Aufgabe (mit GTR)

Fertige eine Wertetabelle für $y = x - 1$ und $y = \log_{10}(x)$ für $0 \leq x \leq 10$ in Einerschritten mit dem Taschenrechner an. Zeichne die beiden Schaubilder in den Heft und vergleiche sie miteinander.

Die Wertetabelle für y = x – 1:

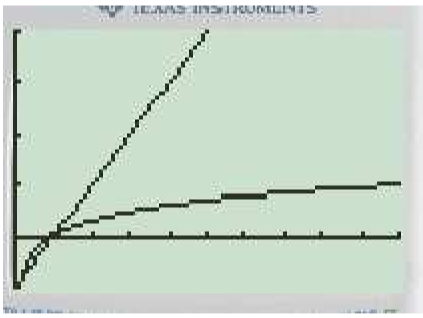
x =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y =	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Die Wertetabelle für $y = \log_{10}(x)$ auf zwei Nachkommastellen gerundet und mit dem Taschenrechner über die log-Taste berechnet:

x =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y =	error	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1

Dass bei x=0 eine Fehlermeldung kommt, ist ok: y ist ja die Hochzahl, die man braucht, damit 10 hoch y gleich Null ist. Aber 10 hoch eine positive Zahl ist immer größer als Null und sogar noch größer als 1. 10^0 ist gerade 1 (nach Definition). 10 hoch eine negative Hochzahl wie bspw. -3 ist ja $10^{-3} = 1/10^3 = 1/1000$. Da entstehen sehr kleine Zahlen, weil Brüche, aber es sind auch hier positive Zahlen.

Die Zeichnung sieht in etwa so aus:



Dabei ist der x-Bereich von 0 bis 10 eingestellt und der y-Bereich von -1 bis 4, damit man die Kurven besser sieht.

Der Logarithmus ist am Anfang größer als die Gerade, flacht aber sehr schnell ab. Beide haben für x=1 eine Nullstelle, denn die Gerade hat y = 1-1 = 0 wie auch y = log(1) = 0 beim Logarithmus ist.