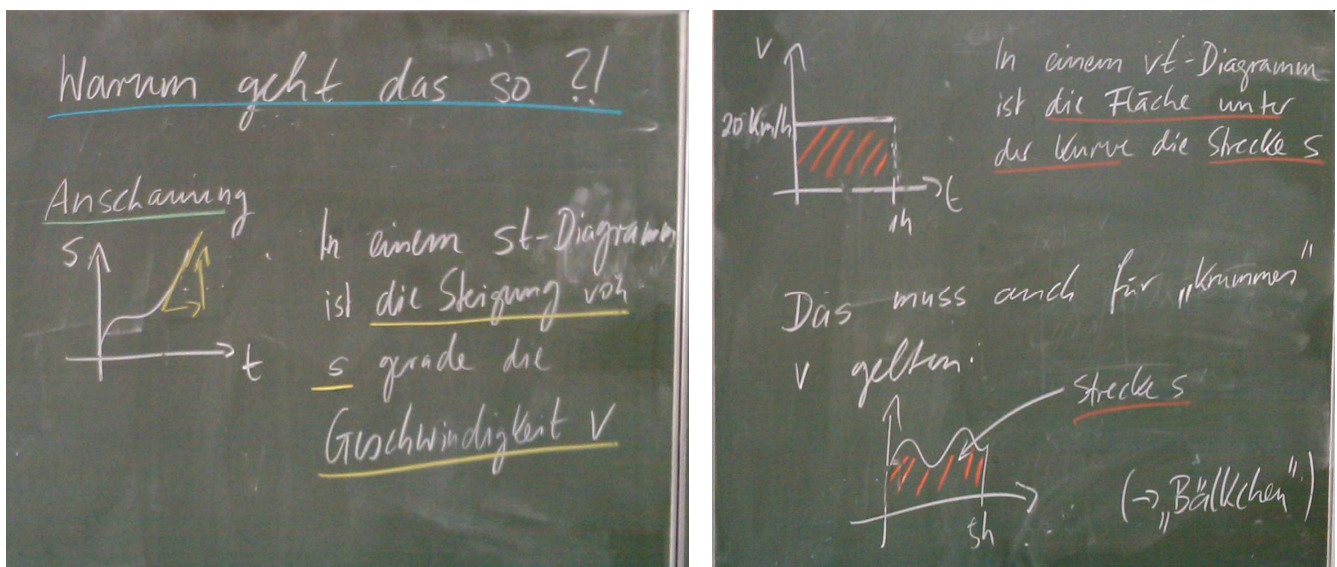


In dieser Doppelstunde habe ich euch versucht zu begründen, wieso die bereits verwendete Technik des „Aufleitens“ dazu verwendet werden kann, um Integrale zu bestimmen.

### Tafelbild

Zuerst noch einmal unser „Kochrezept“, um Integrale (=Flächen) zu berechnen: Gegeben ist ein Integral, beispielsweise:  $\int_{-1}^1 3x^2 dx$ . Wir bestimmen die „Aufleitung“, also eine Stammfunktion von  $3x^2$ . Das wäre  $x^3$ . Nun bilden wir  $[b^3]-[a^3]$ , wobei  $a=-1$  und  $b=1$  ist. Man setzt in die Stammfunktion immer zuerst die obere Grenze ein und danach die untere. Die Differenz ist dann die Fläche unter der Kurve. **Achtung: So berechnet man den saldierten Flächeninhalt!** Hier ergäbe sich  $[(1)^3]-[(-1)^3]=1-(-1)=1+1=2$ . Die runden Klammern helfen dir, dass du keine Vorzeichen verdrehst!

Jetzt zur Begründung. Dazu haben wir einen Exkurs gemacht zu unserem Autofahren:



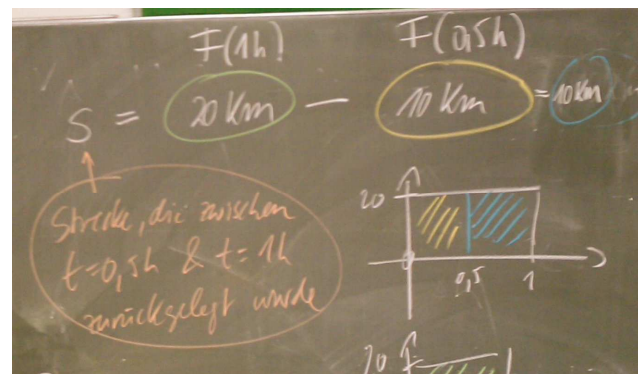
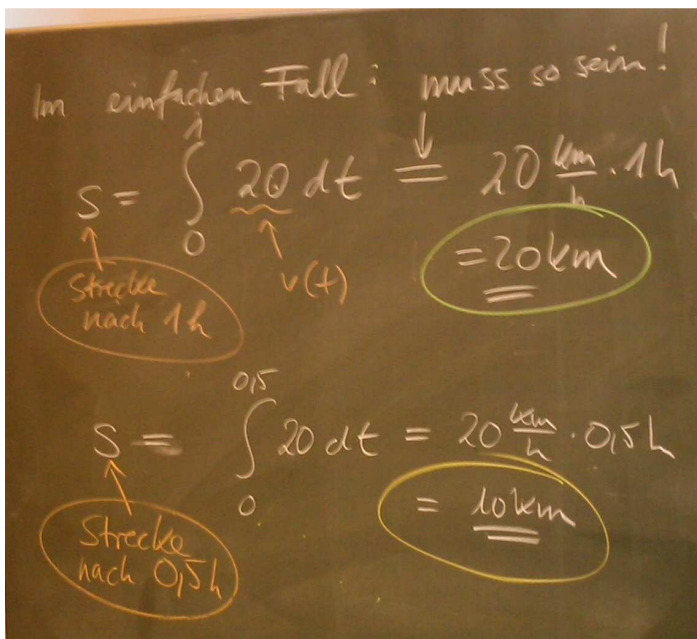
Hier haben wir eine ganz wichtig Sache: Die Geschwindigkeit  $v$  ist die Tangenten(!)steigung von  $s$ . Wäre  $s=f(t)$ , dann wäre  $v=f'(t)$ !!! Man könnte aber auch mit unserem neuen Begriff der Stammfunktion sagen, dass  $s=f(t)$  eine Stammfunktion von  $v=f'(t)$  ist (wenn man von rechts nach links liest). In der rechten Skizze sieht man, dass die Fläche unter der Kurve  $v(t)$  das  $s(t)$  ist. Diese Dinge haben wir uns anschaulich klar gemacht, nicht mathematisch! Die Fläche unter der  $v(t)$ -Kurve muss auch in komplizierten Fällen die Strecke  $s(t)$  sein, was die untere Skizze verdeutlichen soll. *Das Stichwort sind hier die „Balken“, mit denen wir schon die Parabelfläche genähert haben. Man muss  $v(t)$  nur genug fein unterteilen („Balkchen bauen“), dann wird das schon...* Es gilt also immer (für  $t=0$  als Startzeit und beispielsweise 1h Fahrzeit):

$$\int_0^1 v(t) dt = s(1).$$

Sprich, kennst du  $v(t)$ , dann kannst du durch Aufleiten auf  $s(t)$  kommen. Einfach  $t=1$  einsetzen und fertig, denn die Aufleitung von  $v$  ist ja die Strecke  $s$ . Das ist schon ein Spezialfall des Hauptsatzes.

Halten wir fest;  $s$  ist eine Stammfunktion von  $v$  und  $s$  ist die Fläche unter der Kurve  $v$ . Dann MUSS es einen sehr engen Zusammenhang zwischen Stammfunktionen und Flächenintegralen geben... IMMER.

Man kann unseren Spezialfall so verallgemeinern: Für unseren einfachen Fall, nämlich konstantes  $v$ , also  $v(t)=20\text{km/h}$ , ist die gefahrene Strecke ja 20km. Für  $t=0$  bis  $t=0,5\text{h}$  halt 10km. Fragt man sich nun, was die zwischen  $t=0,5\text{h}$  bis  $t=1\text{h}$  zurückgelegte Strecke war, dann kann man einfach die Gesamtstrecke (20km) minus die vorher zurückgelegte Teilstrecke (10km) rechnen. Dann ergeben sich (natürlich) 10km:



In „schlauer“ Integralschreibweise sieht das dann so aus:

$$\int_{0,5}^1 v(t)dt = \int_0^1 v(t)dt - \int_0^{0,5} v(t)dt.$$

Das ist nichts anderes, als dass man die gesuchte Strecke als Differenz von 20km und 10km bestimmt! Und DAS IST DER PUNKT: Wir kennen die beiden Integrale auf der rechten Seite; das sind die Gesamtstrecke  $s(1)$  [siehe Argumentation ganz am Anfang!!!] bzw.  $s(0,5)$  [gleiche Argumentation wie bei  $s(1)$ !!!]. Also steht da eigentlich:

$$\int_{0,5}^1 v(t)dt = s(1) - s(0,5).$$

**Jetzt kann man sagen, super. Aber diese Sache ist großartig!!!**

Erstens geht dieser Weg auch bei kompliziertem  $v(t)$ , siehe Bälkchenidee vom Anfang. Zweitens haben wir gemerkt, dass  $s$  eine Stammfunktion ist von  $v$  und wir so die rechte Seite wirklich im Griff haben, wenn wir das „Aufleiten“ beherrschen.

Zur Begründung, dass auch beim „krummem“  $v(t)$  die Sache funktioniert, ein Beispiel:

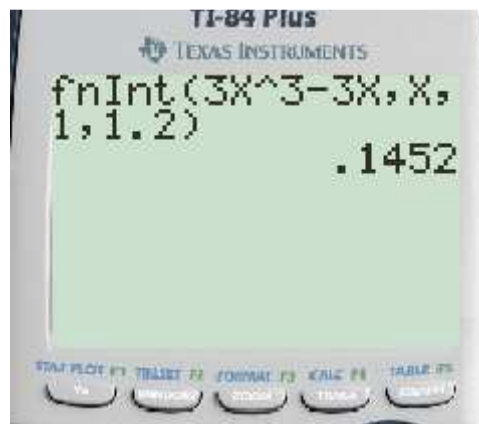
Stell dir vor,  $v(t)$  wäre  $v(t) = 3t(t-1)(t+1)$  und die Grenzen halt mal  $t=1$  und  $t=1,2$ . Wir wollen die Strecke bestimmen, die man zwischen  $t=1$  und  $t=1,2$  zurücklegt (Einheiten sind egal):

$$\int_1^{1,2} v(t) dt = s(1,2) - s(1)$$

Wir brauchen eine Stammfunktion von  $v$ .

Da sehe ich nicht sofort eine, also multipliziere ich mal aus:  $v(t) = 3t(t-1)(t+1) = (3t^2-3t)(t+1) = (3t^3-3t^2)+(3t^2-3t) = 3t^3-3t^2+3t^2-3t=3t^3-3t$ . Ok, das sieht nicht mehr so schlimm aus,  $v(t) = 3t^3 - 3t$  ist überschaubar.

Eine Stammfunktion wäre  $s(t) = 3/4 \cdot t^4 - 3/2 \cdot t^2$ . Überprüfe durch Ableiten! Jetzt bilde ich  $s(1,2)$  und finde etwa  $s(1,2) = -0,6048$ .  $s(1) = -0,75$  ist einfach und damit müsste das Integral oben  $0,1452$  sein. Der GTR liefert:



Da haben wir es! Die Methode funktioniert auch bei „krummem“  $v(t)$ . Und jetzt kommt der Knackpunkt: Die Methode funktioniert, egal, was  $v(t)$  ist!!! Schlag das Buch auf S.97 auf und schau dort auf Aufgabe 6. Das  $A_3$  ist genau das, was wir gerade bestimmt haben. Nur heißt da die Funktion im Integral nicht  $v(t)$ , sondern  $f(x)$  und wir bilden  $dx$  und nicht  $dt$ . Und das  $s(t)$  ist hier eben  $F(x)$ , eine Stammfunktion von  $f(x)$ . Das, was wir hier gefunden haben, ist der berühmte

## **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** **(auch Fundamentalsatz der Analysis genannt)**

Mit wegen diesem Satz ist die Mathematik besonders in den Naturwissenschaften NICHT MEHR WEGZUDENKEN.

Eigentlich beweist man in der Mathematik wichtige Sätze und der da oben ist so einer. Das Problem dabei ist dieses: Der Beweis erfordert einen Mittelwertsatz, damit einen Grenzwertbegriff und die gleichmäßige Stetigkeit. Das sind Begriffe, die in der Schule nicht zur Verfügung stehen. Ich möchte euch keinen halben Beweis liefern und daher verzichte ich auf einen exakten Beweis. Viel wichtiger ist für euch eine Anschauung und dass ihr im Abi mit dieser Rechentechnik umgehen könnt.

Zusammenfassend sagt dieser Satz, dass das Integrieren (= Flächenberechnung bei uns) und das Differenzieren (= ableiten) sich so verhalten wie quadrieren und wurzeln; sie heben sich sozusagen auf. Das ist aber etwas ins Unreine formuliert.