EI M5 2010-11	MATHEMATIK # 4. Klausur – Pflichtteil

1. Aufgabe – light up! **(4 Punkte)**

Bestimme die Ableitungen!

$$a(x) = x^2 \cdot \sin(3x) \qquad\qquad b(x) = \frac{3}{(2x+1)^4}$$

a‛ erhalten wir über die Produktregel mit u=x² und v=sin(3x). u‛=2x und v‛ via Kettenregel ist 3cos(3x). a‛=u′v+v′u=2x*sin(3x)+3cos(3x)*x². Das schreibt sich noch etwas schöner als a‛=2xsin(3x)+3x²cos(3x).

b‛ erhalten wir über die Umschreibung des Bruches b(x) als 3 mal 1/$(2x+1)^4$ bzw. als b(x)=3*$(2x+1)^{-4}$. Die Ableitung b‛ bekommen wir über die Kettenregel und zwar ist b‛ = 3*(-4)*$(2x+1)^{-5}$*2x = -24x/$(2x+1)^5$.

2. Aufgabe **(2 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion f mit f(x) = 3 + e^{2x-2}. Bestimme die Stammfunktion F von f mit F(1)=3.

Solche Aufgaben löst man immer in 2 Schritten. Zuerst findet man mal EINE Stammfunktion von f. Danach schaut man, was die für F(1) liefert. Zuletzt addiert man eine passende Konstante dazu, um auf 3 zu kommen. Das darf man ja, weil diese Konstante beim Ableiten wieder wegfällt! Also:

3 aufgeleitet gibt 3x. e^{2x-2} aufgeleitet sollte e^{2x-2} geben (das ist immer der erste Tipp bei einer e-Funktion). Das stimmt jedoch nicht ganz, denn wegen der Kettenregel kommt beim Ableiten noch die 2 raus. Daher muss 0,5e^{2x-2} richtig sein, denn die 0,5 frisst die 2!

F(x)=3x+0,5e^{2x-2} ist also unser erster Tipp für die Stammfunktion, die F(1)=3 erfüllt. Setzen wir 1 in F ein, erhalten wir aber 3+0,5e^0=3+0,5=3,5. Das ist 0,5 zuviel. Also korrigieren wir F(x) noch mit –0,5: F(x)=3x+0,5e^{2x-2}-0,5.

3. Aufgabe **(2 Punkte)**

Berechne für $z \to \infty$: $\quad I = \int_0^z 2e^{-x}$.

Wir tun erst einmal so, als ob z eine ganz beliebige Zahl ist. Um I ausrechnen zu können, brauchen wir zu f(x)=2e^{-x} ein F! F(x)=-2e^{-x} sollte es tun, denn beim Ableiten kommt „nur“ das Vorzeichen von –x dazu, was vom – vorne gefressen wird!

Nun ist I = F(z) – F(0) = -2e^{-z} – (-2e^0)= -2e^{-z} +2. Nun ist aber e^{-z}=1/e^z. Für wachsendes z (und das fordert die Aufgabe) platzt e^z. Wegen 1 durch schrumpft damit e^{-z} auf Null. Im Unendlichen ist der Ausdruck genau gleich Null und damit gilt I=2.

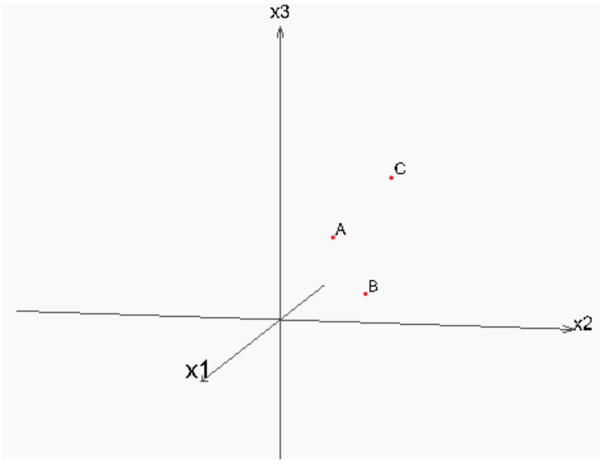
4. Aufgabe **(3 Punkte)**

Gegeben sind die Punkte A(1|2|3), B(0|3|1) und C(2|?|5).

a) Ergänze die fehlende Koordinate in C so, dass der Abstand zu A genau 3 beträgt.

Es soll also d(A,C)=3 sein. Das ist die Länge des Verbindungsvektors AC=(1,?-2,2). Also müssen wir Wurzel von $1^2+(?-2)^2+2^2=5+(?-2)^2$ so anpassen, dass 3 draus wird. Unter der Wurzel muss also 9 stehen bzw. $(?-2)^2$ muss damit 4 sein. Das ist entweder für ?=4 oder für ?=0 der Fall, da in beiden Fällen durch $()^2$ die Zahl 4 entsteht. Wir können uns frei entscheiden und ich wähle ?=4, also C(2|4|5).

b) Zeichne diese drei Punkte in ein Koordinatensystem.



c) Zeige, dass das Dreieck ABC kein gleichschenkliges Dreieck ist.

Gleichschenklig bedeutet, dass zwei Seiten gleich lang sind. Berechnen wir also d(A,B) und d(B,C), denn d(A,C)=3 haben wir ja schon.

d(A,B) ist über den Verbindungsvektor AB=(-1,1,-2) zu wurzel(6) zu berechnen. d(B,C) ist über den Verbindungsvektor BC=(2,1,4) zu wurzel(21) zu berechnen. Offensichtlich stimmt kein Paar der drei Seiten in ihrer Länge überein.

5. Aufgabe **(3 Punkte)**

Ist die folgende Aussage richtig? Es gilt nie $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{c}|$, wenn $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ gilt! Begründe deine Antwort. Du kannst auch mit Beispielen arbeiten.

„Fast immer“ stimmt diese Aussage, aber sie ist nicht allgemein richtig! Ein Beispiel ist a=(1,0,0)=b, denn dann ist c=(0,0,0) der Nullvektor. Die Betragsformel schreibt sich dann als 1-1=0, was stimmt.

6. Aufgabe **(2 Punkte)**

Gegeben ist die Randfunktion f mit f(t)=10·sin(t).

a) Wie groß ist der absolute Flächeninhalt, wenn man die Fläche unter dieser Randfunktion von x=0 bis x=10π betrachtet?

abs(10sin(X)) ist mit dem GTR via fnInt() in den Grenzen von 0 bis 10Pi auszurechnen. Der GTR liefert dann den gerundeten Wert von 200. Aufpassen muss

man mit der Einstellung im MODE! X muss in RADIAN (Bogenmaß) und nicht in DEGREE (Grad) gemessen werden. Denn ansonsten kommt ca. 84 raus.

b) Wie groß ist der orientierte Flächeninhalt?

D die Funktion punktsymmetrisch ist und periodisch, ist die orientierte Fläche je volle Periode immer Null; die Flächen oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse heben sich immer genau weg. Der GTR liefert ein Ergebnis mit E-11 oder so, aber das er ist halt nicht so schlau und hat daher nach 11 Nullern doch noch ein paar Zahlen hinter dem Komma stehen (die aber falsch sind).

7. Aufgabe **(2 Punkte)**

Wie lauten bei gegebenen Punkten A(a1|a2|a3) und B(b1|b2|b3) die Koordinaten des Mittelpunktes M?

M(m1|m2|m3) hat die Koordinaten mi=(ai+bi)/2 mit i=1,2,3! Man kann es auch komplizierter lösen und stellt erst einmal den Verbindungsvektor AB auf, um diesen dann ab dem Punkt A zu gehen. So gelangt man auch zu M und zum gleichen Ergebnis wie oben (nach einigem Kürzen).

8. Aufgabe **(2 Punkte)**

Der Punkt P(1|2|3) wird am Punkt Q(1|1|1) auf den Spiegelpunkt P�much gespiegelt. Wie lauten die Koordinaten dieses Spiegelpunktes P‘?

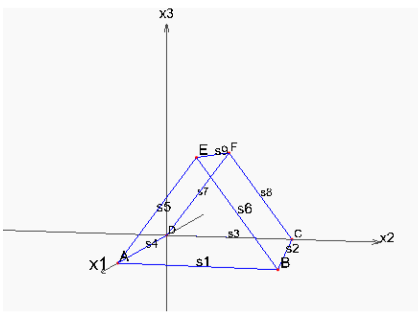
Man stellt den Verbindungsvektor QP auf, von dem man dann von Q nach P gelangen kann. Diesen geht man aber einfach -1mal! Dann landet man beim Punkt P‘: QP=(0,1,2) und damit q-QP=(1,1,1)-(0,1,2)=(1,0,-1). Macht man die Probe, kann man feststellen, dass Q der Mittelpunkt von P und P‘ ist!

9. Aufgabe **(10 Punkte)**

Das Dach eines Hauses soll neu gedeckt werden. Es wird von den Eckpunkten A(8|0|0), B(8|6|0), C(0|6|0), D(0|0|0), E(8|3|4) und F(0|3|4) begrenzt. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter.

a) Zeichne das Dach in ein geeignetes Koordinatensystem.

Generell bei Algebra-Aufgaben gilt: Man muss sich oft selbst überlegen, wie der Text gemeint ist, da in den Zahlen alles „drinnen steht“, nicht aber im begleitenden Text. Hier gibt es die Koordinaten A, B, C und D, die alle in der z-Koordinate 0 übereinstimmen. Das werden höchstwahrscheinlich die Koordinaten des Dachstuhls sein. Da auch E und F in z=4 übereinstimmen, wird dies noch einsichtiger. Außerdem haben E und F mit y=3 genau den Mittelwert von 0 und 6, was die y-Koordinaten der anderen 4 Punkte sind. Das werden die Gibelecken sein:



b) Berechne den Inhalt der gesamten Dachfläche.

Die Dachfläche sind die Flächen von BCFE und ADFE. Beide sind gleichgroß, daher genügt eine Fläche. Beide sind Rechtecke, daher brauchen wir nur Höhe mal Breite zu rechnen. Die Höhe ist der Abstand von A und E, die Breite ist der Abstand von B nach C (jeweils als Beispiel). B und C haben den Abstand 8 (VV hat Betrag 8) und der VV von A nach E ist mit (0,3,4) vom Betrag 5 lang. Also hat man 40 als Fläche und da die Einheit 1m ist, sind es 40m². Es gibt zwei Dachflächen; insgesamt 80m².

c) Die Dachbalken des Dachstuhls sollen ebenfalls erneuert werden. Da die Architekten komisch geplant haben, geht ein Dachbalken von Punkt A zu F. Wie lang ist dieser Balken?

Der Balken hat die Länge des VV von A und F, also von (-8,3,4). Wurzel aus (64+9+16) ist wurzel(89), etwa 943cm.

d) Es soll ein Vorhang in der Mitte (also auf halber Höhe von A nach D bzw. von B nach C) des Dachstuhls installiert werden. Er hängt 2,20m nach unten. Geht das oder ist der Balken im Weg? Wenn der Balken stört, wie lang darf der Vorhang sein?

Auch hier ist die Schwierigkeit, überhaupt zu wissen, was gemeint ist. Auch halber Höhe soll ein Vorhang aufgehängt werden. Er hat die x-Koordinate von 4 und startet mit der z-Koordinate von 4. Der Vorhang wird dem Dach angepasst dreieckig sein müssen. Wenn der Balken bei x=4 einen z-Wert zwischen 4 und 1,8 hat, ist er im Weg! Der Balken liegt auf der in A beginnenden Geraden g mit x = a+t(-8,3,4) = (8,0,0)+t(-8,3,4). Für t=0,5 wird die x-Koordinate gerade 4. Die z-Koordinate ist dann 0+0,5*4=2. Damit wäre der Balken dem Vorhang im Weg. Der Vorhang darf von der Spitze gemessen max. 2m lang sein.