EI M5 2010-11	*MATHEMATIK* 3. Klausur – Lösung	GLÜCK ERFOLG

1. Aufgabe – light up! **(3 Punkte)**

Bestimme eine Stammfunktion zu den Funktionen mit den folgenden Funktionstermen:

$a(x) = \sin(2x + 1)$ $\qquad$ $b(x) = \frac{1}{5x^2}$ $\qquad$ $c(x) = \frac{2}{e^x}$

Zu a(x): Die Stammfunktion von sin(x) ist –cos(x). Nimmt man A(x)=-cos(2x+1), dann geht es schief, weil abgeleitet ist das leider 2sin(2x+1); es ist ein Faktor 2 zuviel. Daher wählt man A(x)=-0,5cos(2x+1). Der Faktor 0,5 hebt beim Ableiten genau diese „überflüssige" 2 auf, mach die Probe!

Zu b(x): Wir „zerlegen" den Bruch wie folgt: $1/5x^2 = 1/5$ mal $1/x^2$. Danach kann man also schreiben: $b(x)=1/5$ mal x^{-2}, denn $1/x^2$ ist eben gerade x^{-2}. In dieser Form lässt sich eine Stammfunktion finden! Für x^{-2} findet man $-x^{-1}$ und damit ist $B(x)=1/5$ mal $(-x^{-1}) = -0{,}2/x$.

Zu c(x): Auch hier schreiben wir den Bruch um: $c(x)=2/e^x=2$ mal e^{-x}. Das bedeutet, dass man eine Stammfunktion von e^{-x} finden muss. e^{-x} abgeleitet stimmt fast, liefert aber $-e^{-x}$. Durch das Setzen eines Minus vor diesen ersten Tipp hat man schon Erfolg und findet $C(x)=-2e^{-x}$.

2. Aufgabe **(3 Punkte)**

Berechne die folgenden Integrale A, B und C mit dem Hauptsatz:

$A = \int_{-2}^{2} x(x-1) + 1dx$ $\qquad$ $B = \int_{1}^{2} \frac{1+x}{x^3} dx$

Zu A: Hier sollte man es sich einfach machen und die zu integrierende Funktion erst einmal zerlegen; $x(x-1)=x^2-x$ und damit geht das Integral über x^2-x+1. Dazu eine Stammfunktion wäre $x^3/3-x^2/2+x$. Dann für x=2 ergibt sich 8/3 bzw. für x=-2 ergibt sich -4-8/3. Da man das zweite vom ersten abzieht, findet man insgesamt 4+16/3 oder 9+1/3=9,333… als Ergebnis.

Zu B: Hier zerlegt man wieder und zwar trennt man oben beim + auf zu $1/x^3+x/x^3$. Dann kann man noch kürzen und zwar zu $1/x^3+1/x^2$. Nun suchen wir dazu eine Stammfunktion. Für $1/x^3=x^{-3}$ ist das $-0{,}5x^{-2}=-0{,}5/x^2$ und für $1/x^2$ ist es (siehe 1b) die Stammfunktion $-1/x$. Also müssen wir 2 bzw. 1 in $-0{,}5/x^2-1/x$ einsetzen. Für x=2 finden wir -5/8, wovon (-3/2) abgezogen werden. Das macht -5/8+12/8=7/8.

3. Aufgabe **(2 Punkte)**

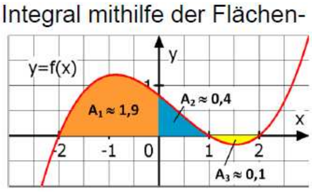
Bestimmen Sie das Integral mithilfe der Flächeninhalte.

a) $\int_{-2}^{0} f(x)dx$

b) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

c) $\int_{0}^{2} f(x)dx$

d) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$



a) I=1,9 $\qquad$ **b) I=2,3** $\qquad$ **c) I=0,3** $\qquad$ **d) I=2,2**

4. Aufgabe **(2 Punkte)**

Sind die folgenden Aussagen richtig? Begründe deine Antwort!

a) Im obigen Schaubild gilt f'(-2)≈-2.
b) Wenn immer f'(x)>0 ist, dann ist die Funktion f monoton fallend.
c) Orientierter und absoluter Flächeninhalt sind das gleiche.
d) Für die Funktion f mit $f(x)=3x^2$ gibt es genau eine Stammfunktion F und zwar $F(x)=x^3$.

Zu a): Nein! f' ist die Steigung und die ist positiv; legt man ein Geodreieck an und zählt Kästchen kommt man auf ca. f'(-2)=2.

Zu b): Wäre hier ein <-Zeichen, wäre alles richtig! So ist f monoton wachsend.

Zu c): Sind sie nicht! Beim absoluten Flächeninhalt werden negative Vorzeichen „gekillt" und es addieren sich alle Flächen positiv zusammen. Beim orientierten Flächeninhalt hingegen werden die Flächen, die unterhalb der x-Achse liegen, negativ bewertet.

Zu d): Nein. Es gibt unendlich viele; eine weitere wäre $F(x)=x^3+1$.

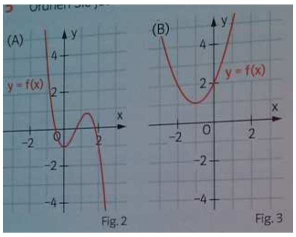
5. Aufgabe **(2 Punkte)**

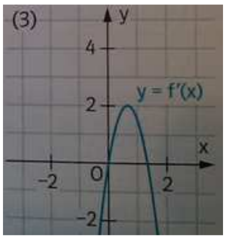
Weise nach, dass die Funktion F mit F(x) = x·sin(x)+4 eine Stammfunktion der Funktion f mit f(x) = sin(x)+x·cos(x) ist.

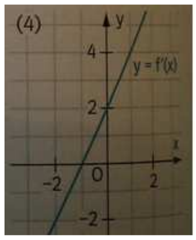
Wenn F Stammfunktion ist, dann muss F' gerade f ergeben. Testen wir das: F'(x) bekommen wir, wenn wir xsin(x) ableiten können, denn die 4 fällt ja weg. xsin(x) ist ein Produkt, also nehmen wir die Produktregel: u=x, u'=1, v=sin(x), v'=cos(x). Dann ist F'=1 mal sin(x) + x mal cos(x) = sin(x)+xcos(x). Das ist gerade f. Fertig.

6. Aufgabe **(2 Punkte)**

Ordne die Schaubilder A und B den Schaubildern ihrer Ableitungen 3 und 4 zu. Begründe kurz!







Hier gehört die rote Parabel (B) zur blauen Geraden (4) und entsprechend (A) zu (3). Begründung: Tiefpunkt (B) und Nullstelle (4) fallen zusammen, gleiches gilt für die Nullstellen der (3) und der Wendeparabel (A).

7. Aufgabe **(2 Punkte)**

Bestimme folgende Werte mit dem GTR (Tipp: -2.5E-4 = -0.00025):

$A = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2y)\,dy \qquad B = 25 - \int_{-5}^{5} \frac{x^2}{10}\,dx \qquad C = \int_0^{30} (-0{,}25z^2 + 30z)\,dz$

Das ist stupides eingeben… bspw. via MATH,9: fnInt(cos(2X),X,-Pi/2,Pi/2) ENTER usw. Dabei musst du darauf achten, dass man im GTR zuerst die linke Grenze eingibt! Man findet so: A=-2.51…E-14, was ziemlich genau 0 ist (es ist eigentlich

genau gleich Null, wir rechnen das im Unterricht nach). Für B=16,67 und für C=11250.

8. Aufgabe **(4 Punkte)**

Eine zweistufige Rakete hat bei der Zündung der zweiten Stufe eine Höhe von 12.500 Metern erreicht. Ihre Vertikalgeschwindigkeit während des 30 Sekunden dauernden Abbrennens der zweiten Stufe beträgt $v(t) = -0{,}25t^2 + 30t + 450$ ($0<t<30s$, $v(t)$ in m/s).

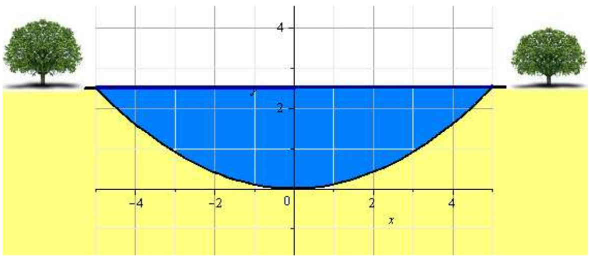
a) Welche Höhe hat die Rakete nach dem Abbrennen der zweiten Stufe erreicht?
b) Wie lange dauert es, bis die Rakete auf einer Höhe von 30.000 Metern ist?

Zu a): Dazu müssen wir die Strecke unter v(t) im Schaubild von 0 bis 30 ausrechnen. Alternativ könnten wir auch s(t) als Stammfunktion von v(t) aufstellen… Wir geben Y1=-.25X^2+30X+450 ein, stellen das WINDOW auf x=0 bis x=30, probieren am y-WINDOW rum (ymax=2000 ist gut) und gehen via CALC 7: auf das Integral. Der GTR sagt uns dann 24750. Das hat hier einen Sinn; es sind 24.750 zurückgelegte Meter. 12.500 Meter gabs vorher schon, also sind es 24.750+12.500=37.250 Meter.

Zu b): Da kann man jetzt das Integral von 0 bis ? über v(t) aufstellen, aufleiten und gleich 30.000 setzen (bzw. 17.500, je nachdem, wie man die Aufgabe versteht) und löst nach ? auf. Oder man probiert im GTR. Ich schaue mal, wann wir insgesamt bei 30.000m sind und ziehe 12.500m ab, also wie lang nach dem Zünden der Stufe haben wir 17.500m zurückgelegt? Wir spielen an der upper bound rum und finden etwa 23s. Das ist etwas ungenau; dann sind wir erst auf 29.771 Meter, aber kurz danach ist es dann soweit…

9. Aufgabe **(10 Punkte)**

Der Boden eines 2km langen Kanals hat die Form einer Parabel. Dabei entspricht eine Längeneinheit 1m in der Wirklichkeit:



a) Wie breit ist der Kanal? Wie tief ist er an seiner tiefsten Stelle?
b) Kann die Form des Kanals näherungsweise mit $f(x)=-0.1x^2$ beschrieben werden? Wenn nein, wie dann? Begründe deine Antwort kurz.
c) Bestimme die blau gefärbte Fläche (Tipp: $5^2=25$ und $5\cdot 10=50$).
d) Wie groß ist die Wassermenge, die sich in dem 2km langen Kanal befindet, wenn er randvoll gefüllt ist (Tipp: bei Körpern, die nicht spitz zulaufen errechnet man das Volumen immer über „Grundseite mal Höhe")?

Zusatz: Wieviel Wasser ist im Kanal, wenn er bis zur halben Höhe gefüllt ist? ***(+2 Punkte)***

Zu a): Der Kanal ist 10m breit und 2,5 Meter an der tiefsten Stelle.

Zu b): Haut nicht hin, denn mit dem Minus ist die Parabel nach unten geöffnet. Zufälligerweise passt aber $f(x)=+0.1x^2$, denn $f(0)=0$, $f(5)=2{,}5$ usw.

Zu c): Hier muss man einmal um die Ecke denken (oder Kästchen zählen, aber dann wird's ungenau und gäbe einen Abzug): Wir können ja die Fläche unterhalb der blauen Fläche berechnen; das ist einfach das Integral über $0.1x^2$ mit den Grenzen -5 und 5. Das ist laut GTR etwa 8,3. Dann ist aber diese Fläche plus die blaue gerade 10 mal 2,5 (Rechteck mit Breite 10 und Höhe 2,5; siehe a)), was einfach 25 ist. Also muss die Fläche 25-8,3=16,7 sein. Auch hier hat diese Zahl einen Sinn; es sind Quadratmeter, denn die Längeneinheiten sind Meter!

Zu d): Hast du c), hast du d); 16,7 mal 2000 = 33.333 und auch hier wieder eine Einheit; es sind Kubikmeter. Also fasst der Kanal soviel Wasser wie über 33 Tausend Würfel mit 1m Kantenlänge. Das ist viel!

Zusatz: Jetzt ist der Wasserstand bei 1,25 Meter. Wir gehen genauso wie in c) vor, nur dass wir jetzt nicht von -5 bis 5 integrieren. Sondern? Wir suchen die x-Werte der Funktion f, wo gerade f(x)=1,25 gilt. Das können wir über CALC und intersect finden; das ist bei etwa x=3,54. Und wegen der Symmetrie auch bei x=-3,54. Also integrieren wir von -3,54 bis +3.54 und erhalten etwa 2,96m². Das ist im Moment die Fläche UNTERHALB des Wasserstandes. Die wollen wir eigentlich gar nicht und so bauen wir wieder das Rechteckt; diesmal mit Höhe 1,25m und Breite 2 mal 3,54 = 7,08m, was etwa 8,85m² macht. Ziehen wir von diesen 8,85m² die 2,96m² ab, so ergeben sich ca. 5,9m². Das ist deutlich weniger als die Hälfte Wasser! Ist aber anschaulich klar, da die Parabel ja nach oben „breiter" wird. Wasser ist (in Kubikmetern) 2000m mal 5,9m² oder 11800m³ im Kanal.