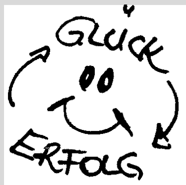
EI M5 2010-11	MATHEMATIK 3.* Klausur – Pflichtteil	

In diesem Teil sind weder GTR noch die Formelsammlung erlaubt. Um den Wahlteil zu erhalten, gib bitte diesen Pflichtteil bearbeitet ab.

1. Aufgabe – light up! **(3 Punkte)**

Bestimme eine Stammfunktion zu den Funktionen mit den folgenden Funktionstermen:

$a(x) = \cos(7x + 4)$ $\qquad b(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad c(x) = \sqrt{2x}$

Zu a): cos hat als eine Stammfunktion sin. Hier ist also sin(7x+4) ein Kandidat. Beim Ableiten kommt allerdings noch ein Faktor 7 hinzu (-> Kettenregel) und daher ist A(x)=(1/7)*sin(7x+4).

Zu b): Zuerst zerlegen wir den Bruch und schreiben „durch 2" als „0,5*" um. Dann hat man b(x)=0,5e^x – 0,5e^{-x}. Jetzt „leiten wir auf", sprich, wir finden eine Stammfunktion: B(x)=0,5e^x + 0,5e^{-x}. Vorne ist es wirklich einfach; der hintere Summand muss „etwas korrigiert werden", weil ja oben „–x" steht und beim Ableiten ein Minus nach vorne geht!

Zu c): Wurzel(2x)=Wurzel(2)*Wurzel(x) und dann hat man es eigentlich schon. Denn Wurzel(x)=$x^{1/2}$ und davon wäre (2/3)*$x^{3/2}$ eine Stammfunktion (Überprüfe es). Also hat man insgesamt C(x)=(2/3)*Wurzel(2)*$x^{3/2}$.

2. Aufgabe **(3 Punkte)**

Berechne die folgenden Integrale A und B mit dem Hauptsatz:

$$A = \int_{-2}^{2} 2x(2 + x)\,dx \qquad\qquad B = \int_{1}^{2} \frac{x^2+2x}{x^4}\,dx$$

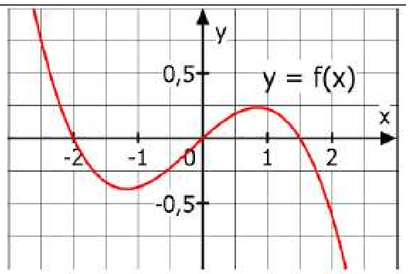
Zu a): Innen steht f(x)=2x(2+x) und das multiplizieren wir aus: 2x*2+2x*x = 4x+2x^2. Jetzt finden wir eine Stammfunktion: F(x) = 4*x^2/2+2*x^3/3 = 2x^2+(2/3)*x^3. Nun brauchen wir F(2) und F(-2) und davon die Differenz ist schon das gesuchte A! F(2)=8+16/3. F(-2)=8+(-16/3). Bei x=-2 muss man mit dem Vorzeichen aufpassen! Jetzt ist A=F(2)-F(-2) = (8+16/3) – (8-16/3) = 32/3. Auch hier muss man mit der Minusklammer aufpassen.

Zu b): Den Bruch f(x) zerlegen wir gleich zu f(x) = x^2/x^4 + 2x/x^4 = 1/x^2 + 2/x^3. Damit kann man schon fast etwas anfangen. Die „Einsdurch-Sache" ist noch nervig, daher schreiben wir 1/x^2+2/x^3 = x^{-2}+2x^{-3}. Jetzt finden wir eine Stammfunktion dazu und zwar F(x)=-x^{-1} – x^{-2}. Denn beim zweiten Summanden kommt beim Ableiten praktischerweise gerade -2 runter und frisst das – zu einem +. Nun können wir die Grenzen einsetzen und bilden F(2)=-2^{-1} – 2^{-2}=-1/2 – 1/4 = -3/4.

3. Aufgabe **(4 Punkte)**

Begründe deine Antworten kurz!

F sei eine Stammfunktion zu dem dargestellten Graphen der Funktion f. Welche der Aussagen über die Stammfunktion F sind wahr, welche falsch?



a) F hat bei x = -2 ein lokales Maximum.
b) F hat für $-2 \le x \le 2$ genau zwei Wendestellen.
c) Es gilt immer F(0) = F(1,5).

Zu a): Das stimmt. Denn f=F‘ hat hier eine Nullstelle UND der Vorzeichenwechsel geht von + zu –, also von steigenden zu fallenden F-Werten!

Zu b): Da f genau zwei Extremstellen hat, muss F an diesen Stellen (ungefähr bei x=-1,2 und x=+0,8) Wendepunkte besitzen.

Zu c): Das ist Quatsch. Wenn die Steigung gleich ist, müssen noch lange nicht die F-Werte übereinstimmen!

4. Aufgabe **(1 Punkt)**

Sind die folgenden Aussagen richtig? Begründe deine Antwort!

a) Im obigen Schaubild gilt $f'(-2) \approx 1$.
b) Wenn für $x_1 > x_2$ immer $f(x_1) > f(x_2)$ ist, dann ist die Funktion f monoton steigend.

Zu a): Das kann nicht stimmen. Die Kurve fällt gerade und f‘ ist daher negativ!

Zu b): Das stimmt! Denn wenn immer für größere x-Werte auch größere Funktionswerte auftauchen, geht’s ja bergauf! Im Endeffekt ist die Steigung die ganze Zeit positiv.

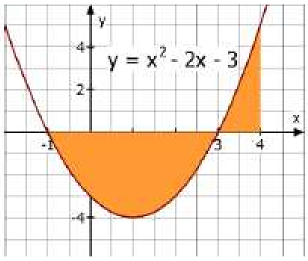
5. Aufgabe **(3 Punkte)**

a) Weise nach, dass die Funktion F mit $F(x) = \sin(x^2+x)+4$ eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \cos(x^2+x)\cdot(2x+1)$ ist.
b) Gib eine weitere Stammfunktion für die Funktion f an!

Hier überprüfen wir einfach, ob F‘=f gilt. F(x) = u(v(x))+4 mit u=sin und v=x²+x. Daher werden wir die Kettenregel an und erhalten F‘(x)=u‘*v‘ (die +4 fällt weg), was gerade cos(x²+x)*(2x+1) ergibt. Passt!

6. Aufgabe **(2 Punkte)**

Berechnen Sie den Inhalt A der gefärbten Fläche. Die für die Berechnung notwendigen Grenzen sollen abgelesen werden.



Die Randkurve ist mit f(x)=x²-2x+3 gegeben. Die Grenzen sind -1 und 4. Allerdings soll man die Fläche, also den absoluten Inhalt, berechnen. Da der Teil von -1 bis 3 unterhalb der Kurve liegt, können wir hier aufteilen und berechnen zuerst das Integral von -1 bis 3 und danach das Integral von 3 bis 4. Es ergibt sich dann insgesamt gerundet 13. Man kann auch mit abs(f(x)) arbeiten!

7. Aufgabe **(4 Punkte)**

Untersuche, ob die nach rechts „ins Unendliche" reichende Fläche mit der linken Grenze a=1 unter dem Graphen von f mit $f(x)=10/x^3$ einen endlichen Flächeninhalt hat. Begründe deine Vermutung ausführlich!

Hier muss man etwas rumprobieren. Man gibt Y1=10/X^3 in den GTR und stellt das WINDOW mal für x von 0 bis 100 ein und für y von 0 bis 10. Wenn man nun über CALC das Integral ausrechnen lässt für die Grenzen 1 bis 10, dann 1 bis 50 und 1 bis 100, so erhält man nacheinander diese Werte: 4.95, danach 4.998 und 4.9995. Es sieht danach aus, dass der Wert nicht über 5 anwächst. Noch ein Test: x von 1 bis 1000 und man erhält 4.999995.

Man kann das übrigens per Hand exakt nachweisen, was hier aber nicht gefragt ist. Man bildet die Stammfunktion $F(x)=-5/x^2$ und hat dann für die untere Grenze F(1)=-5. Für die obere Grenze nehmen wir einmal x=1.000.000. Dann muss man -5 durch 1.000.000. mal 1.000.000. teilen! Das ist praktisch Null! Also ist F(obere Grenze) minus F(1) ungefähr 0 minus -5 bzw. einfach +5.

8. Aufgabe **(5 Punkte)**

Bei einer Sturmflut läuft ein kleiner See hinter einem Deich voll. Vor der Flut befinden sich 2000 Liter im See. Der Zufluss lässt sich mit folgender Funktionsvorschrift beschreiben:

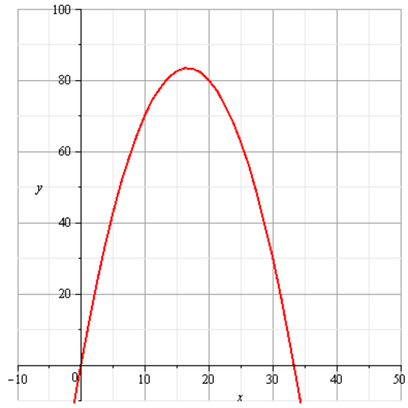
$$v(t) = -0{,}3t^2 + 10t \qquad \text{(t in Minuten, v(t) in Litern pro Minute)}$$

Positive v-Werte bedeuten einen Zufluss, negative v-Werte einen Abfluss.

a) Bestimme den Zeitpunkt, an dem der Zufluss maximal ist.
b) Wieviel Liter sind maximal im See? Wann ist dies der Fall?
c) Wann befinden sich mindestens 2500 Liter im See?
d) Wann ist die durch die Sturmflut zugeflossene Wassermenge wieder abgeflossen?

Zuerst einmal geben wir v(t) in Y1 ein, um uns einen ersten Überblick zu verschaffen. Bei WINDOW-Standardkonfiguration (x=-10..10, y=-10..10) sieht man erst einmal zu wenig! Die „Linie" haut nach oben ab. Also erhöhen wir y auf bis zu 100. Dann sieht man schon mehr. Allerdings fehlt noch „mehr x" und so erhöhen wir den x-Bereich auf 100. Das ist dann schon zu viel des Guten. Also halbieren wir und

haben insgesamt diese Bereiche: x=-10..50, y=-10..100. Jetzt kann die Aufgabe losgehen. So schauts im GTR aus:

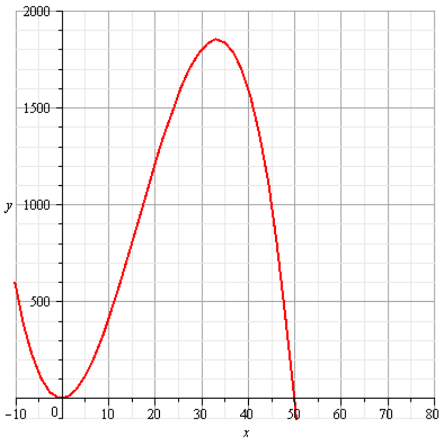


Zu a): Den Zeitpunkt haben wir, wenn am meisten Liter pro Minute im Becken landen. Das kann man direkt aus unserem Schaubild oben ablesen und es sollte bei ca. t=17min der Fall sein (via CALC -> max).

Zu b): Der hintere Teil der Frage ist einfacher! Solange die Parabel da oben positive y-Werte liefert, gibt es Zufluss. Bei ca. t=33min stoppt der Zufluss und das Abfließen beginnt. Die zugeflossene Menge ist das Integral von 0 bis 33 über v(t) und der GTR liefert hierfür gerundete 1851 Liter. 2000 Liter waren schon im Becken und so haben wir ca. 3850 Liter im Becken.

Zu c): Hierfür müssen 500 Liter zugeflossen sein. Also für welches t ist unter der Kurve gerade 500?! Alternativ kann man auch die Stammfunktion bilden, aber so geht's auch. Einfach etwas probieren und du findest ca. 11,5min.

Zu d): Wann sind die zugeflossenen 1851 Liter wieder abgelaufen? Vielleicht ist es an dieser Stelle doch besser, die Stammfunktion zu finden, es geht aber auch wieder über Probieren mit v(t) und der oberen Integralgrenze. Eine Stammfunktion ist $V(t)=-0.1t^3+5t^2$:



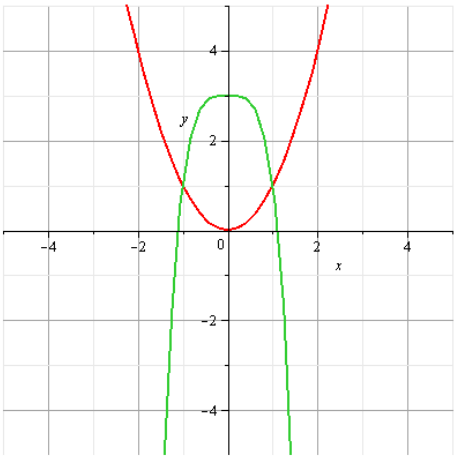
Dabei muss man wieder etwas am WINDOW rumspielen. Wundere dich nicht, dass du y bis 2000 hochsetzen musst. Der Zufluss war ja 1851 Liter! Bei ca. t=50min ist dann wieder alles abgeflossen.

9. Aufgabe **(5 Punkte)**

Gegeben sind die zwei Funktionen f und g mit den Funktionstermen $f(x)=x^2$ bzw. $g(x)=-2x^4+3$.

a) Berechne den Flächeninhalt, der von der x-Achse und dem Schaubild von g begrenzt wird.
b) An welchen Stellen schneiden sich die beiden Funktionen f und g?
c) Berechne den Flächeninhalt, der von den beiden Funktionen im Schaubild begrenzt wird!

Auch hier kloppt man gleich mal f und g in den GTR ein, bevor man loslegt. So hat man einen besseren Überblick. Das WINDOW muss man nachjustieren, ganz gut sind x=-5..5 bzw. y=-5..5:



Jetzt beginnen wir erst mit der Aufgabe:

Zu a): Hier geht es nur um g(x) und die x-Achse. Wir brauchen also die Nullstellen von g(x). Die liefert uns der GTR via CALC -> zero. x1=-1.1 und x2=1.1 (gerundet). Also müssen wir das Integral von -1.1 bis 1.1 über g(x) ausrechnen lassen (bitte nichts selbst rechnen, das kostet Zeit und man kann sich vertun!!!), was gerundet 5,31 ergibt.

Zu b): Das finden wir über CALC -> intersect und es sind exakt x3=-1 und x4=1. Nun sieht man die eingeschlossene Fläche zwischen den beiden Kurven. Vom Integral über die obere Kurve (die grüne) ziehen wir das Integral über die rote Kurve in den Grenzen von -1 bis 1 ab: 4,53.