EI M5 2010-11	MATHEMATIK # 2. Klausur - Pflichtteil

1. Aufgabe – light up! **(5 Punkte)**

Leite die folgenden Funktionsterme nach der Variablen ab und vereinfache sie!

$a(x) = (4x^2 - 3x)e^{2x}$ $b(x) = \frac{2}{e^{5x}}$ $c(x) = -e^{\sin(x)}$ $d(x) = \sqrt{x} \cdot e^{x/2}$

Zu a(x): Hier musst du die Produktregel anwenden mit $u=(4x^2-3x)$ und $v=e^{2x}$, weil zwischen diesen beiden Funktionen eigentlich ein Malpunkt steht (den man wegen der Klammer weglassen kann). $u'=8x-3$ und $v'=2e^{2x}$ und so gilt für $a'=u'v+v'u = (8x-3)e^{2x}+2e^{2x}(4x^2-3x)=e^{2x}(8x-3+8x^2-6x)=e^{2x}(8x^2+2x-3)$.
Zu b(x): Hier kann man mit der Quotientenregel arbeiten, aber auch das Umschreiben mit „Hoch Minus 1" ist möglich und auch viel leichter: $b(x)=2*(e^{5x})^{-1}$. Da hier „e hoch etwas hoch etwas" steht, kann man 5x und die -1 zusammenfassen: $b(x)=2*e^{-5x}$. Jetzt einfach die Kettenregel anwenden und -5 kommt nach vorne: $b'(x)=-10*e^{-5x}$.
Zu c(x): Das Minus vorne schleppen wir einfach mit. Die Verkettung mit $u=e^v$ bzw. $v=\sin(x)$ und passend $u'=e^v$ bzw. $v'=\cos(x)$ liefert uns $c'=u'v'=e^{\sin(x)}*\cos(x)$.
Zu d(x): Hier liegt wieder ein Produkt vor. $u=\text{Wurzel}(x)=x^{1/2}$ und $v=e^{x/2}$ liefern $u'=1/2*x^{-1/2}$ bzw. $v'=1/2*e^{x/2}$. Wir setzen das wie für c zusammen und erhalten $d'=u'v+v'u=1/2*x^{-1/2} * e^{x/2} + 1/2*e^{x/2} * x^{1/2}$. Hier kann man noch etwas zusammenfassen, aber das sparen wir uns jetzt einmal.

2. Aufgabe **(2 Punkte)**

Sind die folgenden Aussagen richtig? Begründe deine Antwort!

a) Gilt $f'(a)=0$, dann besitzt die Funktion f für x=a keine Wendestelle.

Das ist so im Allgemeinen falsch. Ein Gegenbeispiel ist $f(x)=x^3$.

b) Die Funktion $f(x) = -e^x - 1$ besitzt eine Nullstelle.

Das ist falsch. e^x liegt immer über der x-Achse. Damit liegt $-e^x$ immer unterhalb. Dann wird noch um eins nach unten verschoben (durch -1) und so wird's nix mit Nullstelle.

c) Die Funktion $f(x) = e^{x^3}$ ist y-Achsensymmetrisch.

Das ist falsch. Ungerader Exponent von x => Punktsymmetrisch zu O(0|0)! Man sieht es auch, wenn man einmal x=1 bzw. x=-1 einsetzt; die Ergebnisse sind dann verschieden!

d) $e^3+e^{-3}=e^0=1$.

Mit einem * anstelle des + wäre es richtig. Das hintere Gleichheitszeichen ist ok.

3. Aufgabe **(4 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x+3}$ für reellwertige x.

a) Bestimme die Tangentengleichung für x=1.

Allgemein ist t: y=mx+c. Hier gilt m=f'(1). Dazu müssen wir also f ableiten. f'=1/2*(x+3)$^{-1/2}$ (Kettenregel). Jetzt für x=1 einsetzen: f'(1)=1/2*(1+3)$^{-1/2}$ = 1/2*(4)$^{-1/2}$ und jetzt sollte man sehen, dass das einfach 1/2*1/2=1/4 ist (Hochschreibweise). Also m=1/4. c finden wir über eine Punktprobe: Für x=1 ist f(1)=Wurzel(4)=2. Also muss 2=1/4*1+c gelten und somit ist c=1,75. Insgesamt findet sich also t: y=1/4*x+1,75.

b) Gegeben ist die Gerade g: y = – 8x. Finde eine Normale von f(x), die zur Geraden g parallel liegt.

Wir suchen eine Normale n: y=mx+c, die parallel zu g liegt. Dann müssen die Steigungen gleich sein! Also gilt m=-8. Die Steigung der Normalen hängt aber von f'(x) ab und zwar gilt: m=-1/f'(x). Also muss -1/f'=-8 sein, oder eben f'=1/8 (Auflösen). f' wiederum ist aber 1/2*x$^{-1/2}$ und daher muss 1/2*x$^{-1/2}$ =1/8 sein. Aufgelöst nach x findet sich dann x=2. Also gehört die zu g passende Normale zu x=2. Mit einer Punktprobe finden wir die Normale: x=2 bedeutet ja y=f(2)=Wurzel(2) Und so muss Wurzel(2)=-8*2+c sein oder c=16+Wurzel(2).

c) Mit welcher Gleichung würdest du den Schnittwinkel zwischen der Normalen aus b) und der x-Achse bestimmen?

Das geht mit tan(Winkel)=m, hier also tan(Winkel)=-8.

EI M5 2010-11	*MATHEMATIK* 2. Klausur – Wahlteil	GTR ERFOLG

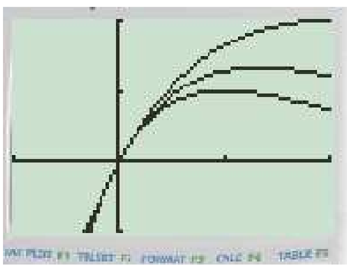
4. Aufgabe **(8 Punkte)**

Gegeben ist die Kurvenschar f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{-ax} + 1$ für reelles a > 0.

a) Zeige, dass der Punkt P(0|1) auf jedem Graphen der Kurvenschar liegt.

Angeblich soll es egal sein, was a ist; wenn man x=0 setzt, kommt y=1 heraus. Testet man das, so ergibt sich 1=0*e^{-a0}+1=0+1=1, was stimmt!

b) Skizziere mithilfe deines GTRs die Graphen für f_1, $f_{0,75}$ und $f_{0,5}$ für -1 < x < 2.



c) Bestimme die Extrempunkte der Kurvenschar. Tipp: $e^b \neq 0$ für alle Zahlen b!

Diese Aufgabe ist ggf. umfangreich. Zuerst muss mit der Produktregel f‘ bestimmt werden. Danach wird mit f‘‘ getestet, welche Art von Extrema vorliegen. Beginnen wir mit f‘: u=x, u‘=1, v=e^{-ax}, v‘=-ae^{-ax} und daher ist f‘=u’v+v’u= e^{-ax} - axe^{-ax}. Wir klammern noch den Faktor e^{-ax} aus und erhalten f‘=e^{-ax}(1-ax). Im Tipp steht, dass der Faktor e^{-ax} nie Null werden kann (die e-Funktion hat keine Nullstelle) und so müssen wir nur (1-ax) auf Nullstellen untersuchen. Wir finden x1=1/a. Mit f‘‘ kann man testen, dass hier ein Hochpunkt vorliegt, alternativ kann man auch auf das Schaubild verweisen! Für x1 ist y1=f(x1)=1/a*1/e+1, also H(1/a|1/a*1/e+1).

d) Bestimme die Ortskurve der Hochpunkte. Wenn du kein Ergebnis hast für die Hochpunkte: Bestimme die Ortskurve dieser fiktiven Hochpunkte: H(2t-4|4-t^2).

Hat man c) gelöst, dann ist x=1/a und y=1/a*1/e+1 und die erste Gleichung liefert uns a=1/x, was in y=… eingesetzt y=x*1/e+1 ergibt. Also ist die Ortskurve eine Gerade.

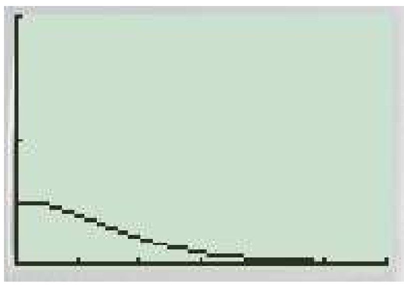
Alternativ kann man x=2t-4 und y=4-t^2 untersuchen und dann findet man t=(x+4)/2, was y=4-$(x+4)^2$/4 bringt.

5. Aufgabe **(6 Punkte)**

Eine Forschergruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestandes in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4 Millionen Fische. Die Zuwachsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch eine Funktion f mit $f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$ (t>0, t in Jahren seit Untersuchungsbeginn, f(t) in Millionen pro Jahr) beschrieben.

a) Skizziere das Schaubild dieser Änderungsrate für die ersten 6 Jahre.

Hier muss man wieder am WINDOW spielen. Die Kurve ist von den y-Werten her ziemlich „mickrig“:



b) Wie verhält sich f für $t \to \infty$?

Man erkennt am Schaubild, dass die Kurve sich der x-Achse annähert, also muss f gegen Null gehen. Am Term sieht man, dass e^t im Zähler zwar sehr groß wird, unten aber sogar ein Quadrat von e^t auftaucht, was noch viel schneller groß wird!

c) Bedeutet dies, dass der Fischbestand abnimmt? Begründe deine Antwort!

Das bedeutet eben nicht, dass der Bestand abnimmt. Zwar wird der Zuwachs nach einigen Jahren praktisch Null, der Bestand wächst aber sehr langsam weiter!