

<p>EI M5</p> <p>2010-11</p>	<p><i>MATHEMATIK</i></p> <p>Logarithmus</p>	<p>gelöst!</p>
-----------------------------	--	-----------------------

1. Station – Funktionalgleichung

Überprüfe die Gleichung aus der Textbox oben, indem du 2^3 , 2^2 bzw. 2^5 explizit ausrechnest.

$2^3=2\cdot 2\cdot 2$, $2^2=2\cdot 2$ und $2^5=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$. Das sind die Zahlen 8, 4 und 32. Da $8\cdot 4 = 32$ richtig ist, stimmt die Regel in der Textbox.

2. Station – Definition des Logarithmus

a) Bestimme $\log_2(8)$, $\log_2(16)$, $\log_4(16)$, $\log_4(4)$, $\log_2(2)$, $\log_2(1)$ ohne GTR.

Nacheinander: 3, 4, 2, 1, 1, 0.

b) Bestimme $\log_3(3)$ und $\log_3(27)$ ohne GTR. Was ist der Logarithmus von $9\cdot 27$ zur Basis 3? Fällt dir etwas auf?

Nacheinander: 1, 3. $9=3^2$ und damit steht unter der Wurzel das Produkt aus 2 Dreiern mal das Produkt aus 3 Dreiern. Insgesamt sind das 5 und somit muss $\log_3(9\cdot 27)=5$ gelten.

c) Berechne $\log_{10}(1000)$, $\log_6(216)$, $\log_{10}(1)$, $\log_2(1/2)$ ohne GTR.

Nacheinander: 3, 3, 0, -1. Letzteres geht wegen $1/x=x^{-1}$. Denn für $x=2$ ist dann gerade $1/2=2^{-1}$.

d) Berechne mit dem GTR $\log(8)$, $\log(5)$ und $\log(40)$.

$\log(8)$ ist etwa 0.9, $\log(5)$ etwa 0.7. $\log(40)$ ist ungefähr 1.6. Das ist aber gerade $\log(8)+\log(5)$!

3. Station – Rechnen mit Logarithmen 1

a) Berechne $\log(5\cdot 200)$ über $\log(5)$ und $\log(200)$ und die obige Gleichung.

$\log(5)=0.7$ (gerundet, das \approx -Zeichen will ich nicht immer eingeben!), $\log(200)=2.3$. $\log(1000)=3$ und das stimmt wieder.

b) Berechne $\log(1000)$, indem du $\log(10)=1$ und die obige Gleichung verwendest!

Zweimaliges Anwenden der Funktionalgleichung: $\log(1000) = \log(10\cdot 10\cdot 10) = \log(10) + \log(10) + \log(10) = 1+1+1 = 3$, was ja auch richtig ist.

4. Station – Reale Probleme lassen sich mit dem Logarithmus lösen 1

1000 € Startkapital, 7% Zinsen. Nach einem Jahr habe ich $1000\text{€} + 0.07\cdot 1000\text{€}$. Das sind aber gerade $1.07\cdot 1000\text{€}$. Mit diesem neuen Betrag geht's wieder genauso und nach x Jahren habe ich daher $1000\text{€}\cdot 1,07^x$. Nun warte ich auf 2000€, also muss ich x finden für die Gleichung $2000\text{€}=1000\text{€}\cdot 1,07^x$. Ich isoliere den Faktor mit x , teile also durch 1000€. Also $2 = 1,07^x$. Weiter geht's unten.

5. Station – Rechenregeln mit Logarithmen 2

- a) Dazu berechne bitte $\log_2(64)$, $\log_4(64)$, $\log_8(64)$ und $\log_{64}(64)$. Stelle nun die Basis 4 als Zweierpotenz da, genauso 8 und 64.

Nacheinander: 6, 3, 2, 1. $4=2^2$, $8=2^3$ und $64=2^6$.

6. Station – Rechenregeln mit Logarithmen 3

- a) Teste die obige Aussage!

10 hoch $\log(1,07)$ ist wirklich gerade 1,07. Wieso? Weil doch $\log(1,07)$ so definiert ist! Diese Zahl ist genau der Exponent, mit dem ich 10 hoch nehmen muss, um auf 1,07 zu kommen. Siehe Station 2: die Definition des Logarithmus. 10 hoch und \log heben sich sozusagen gegenseitig auf! Das ist wie quadrieren und dann wurzeln...

- b) Berechne den Ausdruck $(10^{\log(1,07)})^4$ und $1,07^4$ und vergleiche.

Beide Male erhalten wir etwa 1,3.

- c) Außerdem wissen wir, dass man anstelle von $(10^{\log(1,07)})^4$ auch einfach $10^{4 \cdot \log(1,07)}$ schreiben darf. Überprüfe auch hier, ob dasselbe Ergebnis herauskommt!

Auch hier erhalten wir beide Male wieder etwa 1,3!

7. Station – Reale Probleme lassen sich mit dem Logarithmus lösen 2

$$10^{\log(2)} = 10^{x \cdot \log(1,07)}$$

Nun „springen“ wir in der Gleichung eine Ebene nach oben. Denn wenn die beiden Zahlen links und rechts gleich sein sollen, dann müssen wegen gleicher Basis 10 ihre Hochzahlen gleich sein. Also gilt hier $\log(2) = x \cdot \log(1,07)$ bzw. $x = \log(2)/\log(1,07)$, was etwa 10 Jahren entspricht.

Hier ist die restliche Rechnung von Station 4. Der Trick ist das „Durchlogarithmieren“. Man drückt beide Seiten der Gleichung kompliziert mit 10 hoch $\log(\dots)$ aus. Das ist dann immer noch das Gleiche. Geht man ins Reich der Exponenten, findet man mit dem GTR sofort die Lösung.

- a) Deine Tasse Tee hat 80°C und ist untrinkbar. Der Tee kühlt nach $\text{Tee}(x) = 80^\circ\text{C} \cdot 0,96^x$ ab, wobei x in Minuten einzusetzen ist. Wann hat dein Tee angenehme 40°C ?

$40^\circ\text{C} = 80^\circ\text{C} \cdot 0,96^x$. Teilen durch 80°C liefert $0,5 = 0,96^x$. Dann muss aber $\log(0,5) = x \log(0,96)$ sein und so findet sich x etwa 17 (Minuten).

- b) Vor 24 Jahren war der Tschernobylunfall. Dabei kam Cäsium-137 mit einer Halbwertszeit von 30 Jahren in die Umwelt. Wieviel Prozent der damals ausgetretenen Menge sind heute noch vorhanden?

$50\% = 100\% \cdot \text{Zahl}^{30}$. Wieder isolieren von Zahl^{30} , also teile durch 100%. Dann steht da $0,5 = \text{Zahl}^{30}$ bzw. Zahl ist die 30. Wurzel aus 0,5. Man rundet auf 0,977 und hat so nur noch $100\% \cdot 0,977^{24}$ zu lösen, was etwa 57% ergibt.