EI M5 2010-11	*MATHEMATIK* **Produkt- und Kettenregel**	**u(x)v(x)**

In den vergangenen Schulklassen hast du verschiedene „Prototypen" von Funktionen kennengelernt. Darunter fallen die Potenzen von x wie x^2, x^3, aber auch sin(x), cos(x) und die Wurzelfunktion oder 1/x bzw. $1/x^2$. Für alle diesen verschiedenen Funktionstypen kennen wir mittlerweile die Ableitungen. Auch können wir sie durch Addieren kombinieren und immer noch ableiten. *Wie sieht es aber mit Produkten solcher Funktionen aus? Also mit f(x)=xsin(x) zum Beispiel. Was ist hier f'(x)?! Und wie sieht die Ableitung von $g(x)=\sin(x^2)$ aus?*

1. Station – Produktregel

Wir kennen zwar die Ableitung von x bzw. von sin(x), also den zwei „Faktoren" von f(x)=xsin(x), aber über f' können wir scheinbar keine Aussage machen. Wirklich nicht? Mathematiker haben dieses Problem bereits vor langer Zeit gelöst. Sie haben herausgefunden, dass man f' aus den beiden Ableitungen der Faktoren x und sin(x) berechnen kann. Und nicht nur in diesem Fall, man kann immer über die Faktoren, meistens als u(x) und v(x) bezeichnet, die Ableitung von f(x) berechnen:

Gilt **f(x) = u(x)v(x)**, so ist **f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)**.

In unserem Beispiel wäre u(x)=x und v(x)=sin(x). Für f'(x) brauchen wir u' und v'. Also berechnen wir die: u'(x)=1 und v'(x)=cos(x) und setzen das in die Formel ein:

f(x) = xsin(x) und es ist f'(x) = 1sin(x) + cos(x)x = sin(x)+xcos(x).

Du kannst im GTR mit <nderiv> überprüfen, dass dies die richtige Ableitung ist!

2. Station – Verkettungen

Die erste Frage der Einleitung ist beantwortet, die zweite noch nicht. Die Funktion $g(x)=\sin(x^2)$ ist mathematisch ausgedrückt eine sogenannte Verkettung der beiden Funktionen u(v)=sin(v) und $v(x)=x^2$. Dass in u nur v steht, hat einen Grund. Wir berechnen g(x), indem wir bei vorgegebenem x erst das Quadrat x^2 bestimmen. Das entspricht der Funktion v(x). Das Ergebnis, wir nennen es einfach v, setzen wir dann in den Sinus ein. Eine andere Verkettung ist diese hier: v(x)=4x+5, u(v)=tan(v). Verketten wir beide, bilden also u(v(x)), so ist das tan(4x+5). Man kann auf diese Weise noch kompliziertere Funktionen bilden, als das mit den Produkten aus Station 1 möglich ist. Auch für solche Funktionen geben wir jetzt eine Formel an, mit der man deren Ableitung aus u' und v' berechnen kann.

3. Station – Kettenregel

Wir haben zwei Beispiele, $g(x)=\sin(x^2)$ und h(x)=tan(4x+5). Beginnen wir mit dem ersten Beispiel. u(v)=sin(v) und $v(x)=x^2$. Auch hier kennen wir wieder u' und v' ohne g' zu kennen. Wieder haben Mathematiker das Problem gelöst und wieder gibt es eine allgemeine Formel. Sie lautet:

Gilt **g(x) = u(v) mit v=v(x)**, so ist **g'(x) = u'(v)v'(x)**.

In unserem Beispiel wären ja u'(v)=cos(v) und v'(x)=2x. Also wäre g'(x)=cos(v)2x. Man ersetzt am Ende das v durch v(x). Hier also durch x^2 und erhält so $g'(x)=2x\cos(x^2)$. ***h'(x) ist eine Aufgabe, bei der du beide neuen Regeln brauchen wirst. Übe erst einmal beide Regeln anhand einiger Aufgaben. Fühlst du dich sicher, bestimme h(x)!***