

<p>EI M5 2010-11</p>	<p><i>MATHEMATIK</i></p> <p>Der Integralbegriff – Flächenberechnung und Stammfunktionen</p>	$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$
--------------------------	---	---------------------------------

Mit diesem Arbeitsblatt übst du weiter den Umgang mit Integralen bzw. wie man Flächen berechnen kann oder Bestände rekonstruiert.

Zum Rechnen per Hand brauchst du den Hauptsatz; siehe dazu das Tafelbild vom 22.02.2011. Um die Integrale mit dem GTR zu lösen, kannst du im Tafelbild vom 18.02.2011 nachsehen oder in der auf der Seite verlinkten GTR-Anleitung.

Du musst beim Integrieren von Funktionen immer aufpassen, ob gerade der „absolute“ Flächeninhalt (der „echte“) oder der „orientierte“ (= „saldierte“) Flächeninhalt gemeint ist.

Beim orientierten Flächeninhalt werden Flächen unterhalb der x-Achse negativ bewertet. Der Hauptsatz und der GTR berechnen immer den orientierten.

Solltest du den absoluten Flächeninhalt bestimmen wollen, musst du an den Nullstellen der Randfunktion auftrennen und die Flächen unterhalb der x-Achse einzeln berechnen (und das Minuszeichen „killen“).

1. Station – Wasserstand in einer Badewanne

Du möchtest deine Badewanne (200 Liter) bis 10cm unter den Rand befüllen (weil das Wasser ja nochmal ansteigt, wenn du dich reinsetzt). Dies entspricht 150 Litern.

- a) Du drehst den Hahn am Anfang voll auf. Du hast schlauerweise ein 500ml-Glas und hältst es kurz unter den Hahn. Nach 3s ist das Glas voll. Wie lange kannst du die Wanne aus den Augen lassen, bevor sie überläuft?
- b) Nach wieviel Minuten kommst du am besten wieder zur Wanne und drehst den Hahn zu, um deinen Wunschstand von 150 Litern zu erhalten?

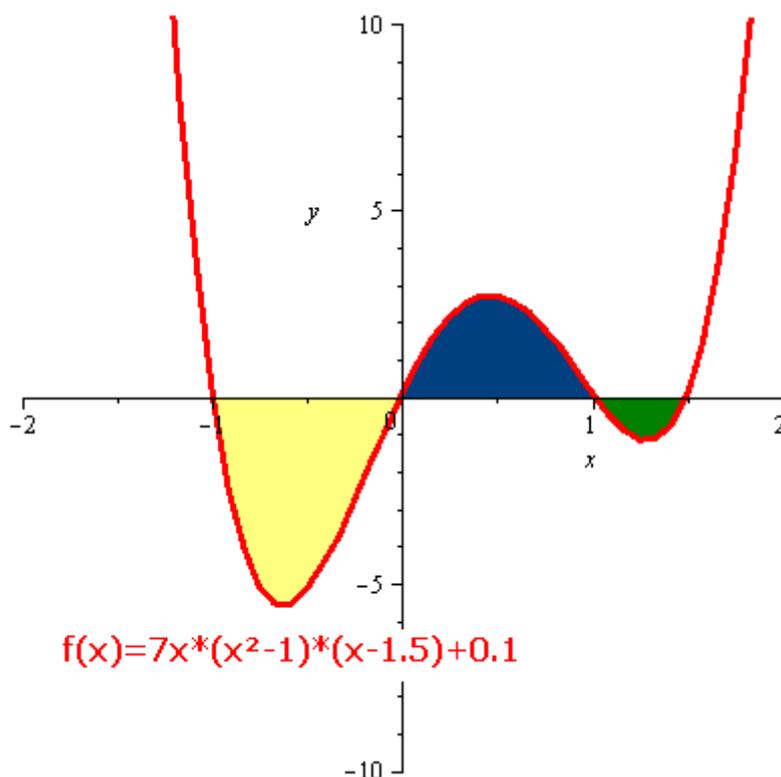
Kurz bevor du dich in die Wanne legst, fällt dir ein, dass Du nach dem Archimedischen Prinzip etwa dein eigenes Volumen an Wasser verdrängst. Da deine Körperdichte etwa der Dichte von Wasser entspricht und du 70kg wiegst, verdrängst du etwa 70kg Wasser. Das heißt, dass 20l überlaufen! Da du zu faul zum Aufwischen bist, öffnest du den Stöpsel. Er gluckst und das überflüssige Wasser fließt ab. Da du in einem Wohnwagen wohnst, läuft das Wasser einfach auf den Rasen deines Stellplatzes. Auch hier prüfst du mit deinem Glas die Abflussrate und notierst dir 500ml in 8s.

- c) Nach welcher Zeit musst du den Stöpsel wieder schließen, damit deine Wanne randvoll ist, wenn du drinnen bist?

Jetzt zum unpraktischen Teil:

- d) Fertige ein Schaubild an, indem du die Zufluss- bzw. die Abflussrate der Badewanne gegen die Zeit aufträgst. Wähle sinnvolle Einheiten. Mache dir am Schaubild klar, welche Fläche negativ zu zählen ist, wenn man die Wasserbilanz von 130 Litern daraus ablesen möchte.

2. Station – Aufstellen von Integralen



- Notiere für die drei markierten Flächen das entsprechende Integral.
- Berechne den absoluten Flächeninhalt der blauen und der grünen Flächen mit dem GTR.
- Berechne den orientierten Flächeninhalt der gelben und der blauen Fläche mit dem GTR.

3. Station – Finden von Stammfunktionen

Finde eine Stammfunktion zu folgenden Funktionen:

- $g(x) = x^2 - 4$
- $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
- $i(x) = x(x - 2)$
- $j(x) = \cos(2x)$
- $k(x) = e^x$
- $l(x) = 1/x^2$

4. Station – Nachweis von Stammfunktionen durch Ableiten

- Überprüfe die Stammfunktionen von Station 3 durch Ableiten!
- Weise nach, dass $F(x) = e^{\sin(x)+3x}$ eine Stammfunktion von $f(x) = (\cos(x) + 3)e^{\sin(x)+3x}$ ist!
- Kannst du eine weitere Stammfunktion von $f(x)$ angeben?

5. Station – Berechnen von Integralen per Hand

Wende den Hauptsatz an! Interpretiere!

- $\int_{-2}^2 (x^3 - 4x) dx$ und überlege dir, wieso genau dieses Ergebnis rauskommt!
- $\int_0^2 (4x^2 + 4) dx$
- $\int_{-2}^0 (4x^2 + 4) dx$ und vergleiche mit b). Was ist anders, was gleich?
- $\int_1^3 x^3 dx$
- $\int_0^1 (2x + 1)^3 dx$ und vergleiche mit d). Fällt dir etwas auf?