EI 8a 2010-11	*MATHEMATIK* HA – Vorbereitung zur 4. Arbeit	~~HA~~

Mit diesen Aufgaben übst du die drei binomischen Formeln weiter ein!

Übersicht

- S. 102 A16 (nur mit den binomischen Formeln rechnen!)
- S. 102 A17
- S. 102 A20 (ist neu und sowas müsst ihr in der Arbeit noch nicht können)
- S. 102 A21a (nur den a)-Aufgabenteil!)
- Vereinfache $(x+2)^3$
- Vereinfache $(2x+1)^3$
- Vereinfache $(x+1)^4$

S.102 A16

Bei dieser Aufgabe nutzen wir die Formeln aus dem Info-Kasten oben auf der Seite. Dabei sind die dortigen Zahlen a und b jeweils zu finden und man muss entscheiden, welche „Sorte" der drei Formeln gebraucht wird.

Zu a): a bleibt a und b=3. Lasst euch bitte nicht verwirren, wenn ihr mit Buchstaben rechnet. Es sind bloße Platzhalter für echte Zahlen.

Exkurs: Es ist oft leichter, erst mit Buchstaben zu rechnen, weil sich Ergebnisse dann schneller berechnen lassen. Ein Beispiel: Berechne 125^2 minus 124^2 und 67^2 minus 66^2. Fragt bitte nicht, wen das interessiert, das ist reine Rechentechnik. Glaubt mir aber, dass man das fürs Leben braucen kann :D Zu den Aufgaben: Klingt schlimm, aber… 125=124+1 und wir haben $125^2=(124+1)^2=124^2+2*124*1+1^2$. Jetzt könnte man das ausrechnen. Da wir aber 124^2 abziehen wollten, ist es viel einfacher; $125^2-124^2=124^2+2*124*1+1^2 - 124^2$. Hier fressen sich die 124^2 und wir haben $2*124*1+1^2=248+1=249$ zu rechnen. Nicht so schlimm. Und auch bei 67^2-66^2 läuft es so; 67=66+1 und probiere es selbst. Egal, was du für eine Zahl hast; nennen wir sie x+1. Dann ist die eins kleinere x. Bilden wir $(x+1)^2-x^2$ haben wir immer 2x+1 zu rechnen, mehr ist es nicht…

Zurück zur a)! a=a und b=3. Es steht ein + zwischen beiden Zahlen und so ist es die erste Formel; das Ergebnis lautet $a^2+2*a*3+3^2=a^2+2*3*a+9=a^2+6a+9$ und mehr kann man nicht zusammenfassen.

In der b) ist a=6 und b=a. Nicht verwirren lassen! Im grauen Kasten oben sind a und b bloße Platzhalter; man hätte auch Kurt und Knut reinschreiben können… Dann wäre jetzt $(\text{Kurt}+\text{Knut})^2$ zu wählen mit Kurt=6 und Knut=a… Lösung: $6^2+2*6*a+a^2=36+12a+a^2$.

Zu c): a=b und b=3 und wir wählen Formel 2 wegen dem Minus zwischen b und 3! Die Lösung: $b^2-2*b*3+3^2=b^2-6b+9$.

Zu d): a=s und b=k und wir nehmen wieder Formel 2! Lösung: $s^2-2sk+k^2$ und nix geht mehr.

Zu e): a=2x, b=5. Formel 1. Lösung (ausführlich siehe f)!): $(2x)^2+2*(2x)*5+5^2=4x^2+20x+25$.

Zu f): $a=7$ und $b=x*3$ bzw. $b=3x$ (das ist $3*x$ und so sieht es schöner aus!) und wegen dem Minuszeichen wählen wir Formel 2. Vorläufige Lösung: $7^2-2*7*(3x)+(3x)^2$. Man kann denken, dass die Klammern zuviel oder überflüssig sind. Sind sie nicht! Macht immer eine Klammer, wenn du für a oder für b mehr als ein Symbol einsetzt. Weil du musst bei $b^2=(3x)^2$ eben $3x*3x=9x^2$ rechnen und nicht nur $3x^2$! Aufpassen!!! Vereinfachte Lösung: $49-42x+9x^2$.

Zu g): 3. Formel, mal was anderes. $a=x$ und $b=3$. Lösung: $x^2-3^2=x^2-9$ und fertig.

Zu h): Wieder Nummer 3. $a=2x$ und $b=6$ und hier die Lösung: $4x^2-36$, denn du musst $2x$ quadrieren, was $2x*2x$ ist und nicht nur $2x^2$ hinschreiben.

Zur 3. binomischen Formel bleibt zu sagen, dass es wurscht ist, ob nun (a-b) oder (a+b) zuerst kommt! Schau dir dazu die Form von g) und h) noch einmal an. Vertausche, wenn du es nicht glaubst.

S. 102 A17
Man kann hier beliebige Zerlegungen wählen. Dabei gibt es welche, die es nicht wirklich einfacher machen und andere, die es einfacher machen. Meine sind welche von der zweiten Sorte, aber sicher nicht die einzig denkbaren Kombinationen!

Zu a): $31=30+1$ und damit ist $a=30$ und $b=1$ und mit der 1. binomischen Formel haben wir $30^2+2*30*1+1^2=900+60+1=961$ als Lösung, denn das da ist $(30+1)^2$ und das ist natürlich das gleiche wie 31^2!

Zu b): $44=40+4$ und mit $a=40$, $b=4$ und der 1. Formel haben wir $40^2+2*40*4+4^2$ auszurechnen. Das ist $1600+320+16=1936$.

Zu c): $29=30-1$ und wir wählen die 2. Formel mit $a=30$ und $b=1$. Lösung: $30^2-2*30*1+1^2 = 900-60+1=841$.

Zu d): $58=60-2$ und mit der 2. binomischen Formel haben wir $60^2-2*60*2+2^2=3600-240+4 = 3364$.

Zu e): $65=60+5$ und mit $a=60$, $b=5$ und 1. Formel haben wir $60^2+2*60*5+5^2=3600+600+25 = 4225$.

Zu f): $17*23$. Hier passen Formel 1 und 2 nicht mehr. Zufälligerweise aber Formel 3… $a=20$ und $b=3$ bringen uns zu $(20-3)*(20+3)$. Das ist ja gerade die Aufgabe ;-) Lösung: $20^2-3^2 = 400-9 = 391$.

Zu g): $38*42$ könnte mit $a=40$ und $b=2$ klappen… $40^2=1600$ und $2^2=4$, also muss das 1596 sein. Passt!

Zu h): $54*46$ geht mit $(50+4)(50-4)$, also $a=50$ und $b=4$ bzw. mit der 3. Formel mit $2500-16 = 2484$.

S. 102 A20
Hier ist „Rückwärtsdenken“ gefragt. Welches a bzw. welches b gab es, wenn das Ergebnis so ist wie angegeben.

Zu a): $x^2+50x+625$. Das kommt von $(x+25)^2$! a=x ist klar, b=25 vielleicht nicht. Erst einmal ein Test: 1. Formel, a=x und b=25: $x^2+2*x*25+25^2=x^2+50x+625$. Passt. Woher b=25?! Entweder siehst du $b^2=625$ und damit b=25, was aber schwer ist. Einfacher ist es mit dem „x-Ausdruck" 50x. Denn darin steckt laut Formel 2*a*b. Nun ist aber a=x, also muss 2b=50 sein oder b=25. So geht's einfacher!!!
Zu b): $x^2-14x+49$. Hier sind a=x und b=7 und wir wählen die 2. Formel: $(x-7)^2$.

Zu c): Hier taucht gar kein x-Ausdruck auf, sondern nur ein x^2! Also muss es die 3. Formel sein mit a=x und b=11. Also (x-11)(x+11).

Zu d): Das ist etwas schwerer. a ist hier nicht einfach x, sondern $a^2=169x^2$. Also muss a=13x sein, denn 13x*13x ergibt gerade 169x. b=2 sieht man sofort an $b^2=4$. Also $(13x-2)^2$

Zu e): Öfter mal was Neues, denn n hatten wir noch nicht. b=1 ist klar und damit muss a=3n sein. Also $(3n+1)^2$.

Zu f): $225x^2-1$ muss wieder die 3. Formel sein. Dabei ist b=1 klar, aber $225x^2=a^2$ ist etwas schwerer auszuwerten. Hier ist 15x=a die Lösung und der Ausdruck ist (15x-1)(15x+1).

Zu g): $-16x+16+4x^2$. Das ist etwas fies. Erst einmal scheint es durcheinander und dem ist auch so. Hinten das $4x^2$ bringt b=2x, ok. Was ist vorne los? -16x+16 kann man auch als 16-16x schreiben und dann ist es klarer; a=4. Denn $(4-2x)^2$ ist genau $16-16x+x^2$ und ist somit die Lösung.

Zu h): Hier haben wir sogar eine Wurzel! Erst einmal ist $a^2=3x^2$ und hier kommt die Wurzel schon rein; Wurzel(3) mal x ist dann das a, denn Wu(3)x*Wu(3)x=$3x^2$! $b^2=2$ liefert noch eine Wurzel, denn b=Wurzel(2) ist dann klar. Damit müsste $(\text{Wurzel}(3)*x+\text{Wurzel}(2))^2$ unser gesuchter Ausdruck sein. Probe: $(\text{Wurzel}(3)*x)^2+2*\text{Wurzel}(3)*x*\text{Wurzel}(2)+(\text{Wurzel}(3))^2$ passt. Diese Teilaufgabe ist wirklich „nervig". Schwer ist sie eigentlich doch nicht, wenn man mit den neuen Wurzel sicher umgehen kann.

S. 102 21a
Ich zähle insgesamt 18 Karten und zwar zähle ich zeilenweise von links nach rechts. Kleiner Test; meine 13 Karte ist $(3x-1)^2$. Hier die Übereinstimmungen

01. Übereinstimmung: Term 2 und Term 8 stimmen überein.
02. Übereinstimmung: Term 1 und Term 6 stimmen überein.
03. Übereinstimmung: Term 10 und Term 13 stimmen überein.
04. Übereinstimmung: Term 3 und Term 4 stimmen überein.
05. Übereinstimmung: Term 7 und Term 17 stimmen überein.
06. Übereinstimmung: Term 11 und Term 14 stimmen überein.
07. Übereinstimmung: Term 15 und Term 16 stimmen überein.
08. Übereinstimmung: Term 18 und Term 12 stimmen überein.

Term 5 und Term 9 ist alleine. Term 9 ist blöd geschrieben; er bedeutet $(3-2x)(3-2x)=(3-2x)^2$ und das ist dann Formel 2 und so kommt nicht Term 5 raus (das wäre bei Formel 3 der Fall)!

Vereinfache $(x+2)^3$
Hier muss man erst einmal wissen, was $(…)^3$ bedeutet. Es bedeutet (…) mal (…) mal (…) oder auch $(…)^2$ mal (…), was es uns einigermaßen erleichtert. Denn $(x+2)^2$ hätten wir mit der 1. Formel gewusst: a=x, b=2 und so ist $(x+2)^2=x^2+4x+4$. Nun haben wir aber hoch 3! Also

müssen wir dieses Zwischenergebnis noch einmal mal (x+2) nehmen. Das geht nach unserem bewährten „das mal das plus das mal das…"-System:

$(x^2+4x+4) * (x+2) = x^2$ mal $x + x^2$ mal $2 + 4x$ mal $x + 4x$ mal $2 + 4x + 4*2$. Das ist dann auch schon alles, aber man kann noch vereinfachen: x^2 mal x ist kurz x^3 und so haben wir insgesamt: $x^3+2x^2+4x^2+8x+4x+8$. Hier kann man noch die x^2-Ausdrücke zu $6x^2$ zusammenfassen und die $8x+4x$ zu $12x$. Insgesamt bleiben $x^3+6x^2+12x+8$.

Vereinfache $(2x+1)^3$

Auch nicht besser als gerade! Wieder berechnen wir zuerst $(2x+1)^2$ zu $4x^2+4x+1$ (Achtung: Hier aufpassen bei $a=2x$, denn so ist $a^2=4x^2$, nicht nur $2x^2$). Jetzt das Ganze mit $(2x+1)$ mal nehmen und das ergibt dann: $2x*4x^2+2x*4x+2x*1 + 1*4x^2+1*4x+1*1$ und das ist dann $8x^3+8x^2+2x+4x^2+4x+1=8x^3+12x^2+6x+1$. Immer aufpassen: Du darfst nur Ausdrücke gleicher „Rangfolge" zusammenfassen; x^3-Ausdrücke (hier gabs nur den einen) oder x^2-Ausdrücke (hier gabs immerhin schon zwei; $8x^2$ und $4x^2$) oder x-Ausdrücke oder normale Zahlen!

Vereinfache $(x+1)^4$

Nochmal was Neues! Hier kannst du 4 Klammern miteinander malnehmen! Das wäre halt ()*()*()*() oder auch ()*() mal ()*() und das nutzen wir jetzt aus. Denn auch hier kennen wir ()*()=()² nach der 1. binomischen Formel mit $a=x$ und $b=1$: $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Was uns das hilft? Naja, () hoch 4 ist ()² mal ()² und dafür setzen wir jetzt jeweils x^2+2x+1 ein. Damit gilt $(x+1)^4=(x^2+2x+1)(x^2+2x+1)$. Jetzt können wir es mühselig ausmultiplizieren. Es geht geschickter, aber wir können das ruhig mal üben… x^2 mal die gesamte hintere Klammer plus $2x$ mal die gesamte hintere Klammer plus 1 mal die gesamte hintere Klammer und das ergibt dann: $x^2(x^2+2x+1)$ + $2x(x^2+2x+1)$ + $1(x^2+2x+1)$. Der dritte blaue Ausdruck ist sehr einfach, das ist eben x^2+2x+1. Doch was ist mit den beiden ersten? Der gelbe ist eben $x^2*x^2+x^2*2x+x^2*1$ und das ist $x^4+2x^3+x^2$. Der grüne Ausdruck ist $2x*x^2+2x*2x+2x*1$ = $2x^3+4x^2+2x$. Zusammen macht das dann für $(x+1)^4$: $x^4+2x^3+x^2$ + $2x^3+4x^2+2x$ + x^2+2x+1. Darin kann man noch einige Ausdrücke zusammenfassen (siehe vorherige Aufgabe) und man findet zuletzt: $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$. Das war sehr schwer!