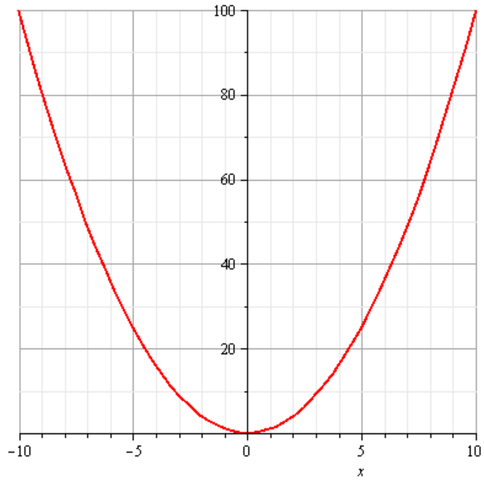
EI 8a 2010-11	MATHEMATIK 4. Arbeit - Lösung	$(a+b)^2$ $(a-b)^2$

1. Aufgabe – MIT GTR! **(5 Punkte)**

a) Gib den Term einer Parabel an und skizziere diese Parabel.
b) Erläutere an deinem Schaubild, was die Begriffe „Symmetrieachse" und „Scheitelpunkt" bedeuten und wie beide miteinander zusammenhängen.
c) Stimmt der Satz „Wenn eine Parabel nur eine Nullstelle hat, dann ist diese Nullstelle gleichzeitig ihr Scheitelpunkt"? Begründe kurz!

Zur a): **$y = x^2$**



Zur b): Wie man hier gut erkennen kann, ist die y-Achse eine Symmetrieachse. Der Scheitelpunkt liegt auf dieser Symmetrieachse. Der Scheitelpunkt ist der größte oder kleinste Wert einer Parabel; je nachdem, ob sie nach unten oder nach oben geöffnet ist. Die Symmetrieachse muss nicht immer die y-Achse sein, aber sie geht immer durch den Scheitelpunkt.

Zu c): Gibt es zwei Nullstellen, liegt der Scheitelpunkt genau zwischen diesen. Rücken diese beiden Nullstellen mehr und mehr zusammen, dann befindet sich der Scheitelpunkt immer noch dazwischen. Fallen beide Nullstellen auf einen x-Wert zusammen, muss der Scheitelpunkt genau diesen x-Wert haben. Da die Parabel in einem solchen Fall die x-Achse berührt ohne sie zu schneiden, liegt der Scheitelpunkt genau auf ihr und so sind Scheitelpunkt und die Nullstelle gleich. Wobei die Formulierung nicht so sauber ist. Ein Punkt hat immer x- und y-Wert, eine Stelle nur einen x-Wert (oder y-Wert, nicht beides).

2. Aufgabe – OHNE GTR! **(5 Punkte)**

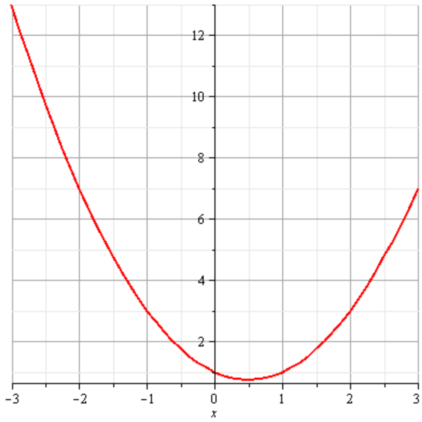
Gegeben ist die Zuordnungsvorschrift $y = x^2 - x + 1$ für alle reellen Zahlen x.

a) Vervollständige für die obige Vorschrift diese Wertetabelle:

x-Wert	–1	0	0,5	1	2	3
y-Wert	**3**	**1**	**0,75**	**1**	**3**	**7**

b) Setze die Wertetabelle in ein Schaubild („schöne Skizze") um.
c) Wieviele Nullstellen hat diese Parabel? Begründe deine Antwort anhand deiner Skizze.

Zu b): Man trägt in ein Koordinatensystem die Punkte (-1|3), (0|1), (0,5|0,75), (1|1), (2|3) und (3|7) ein und kann die Symmetrieachse durch x=0,5 erkennen. Dann verbindet man so gut es geht die Punkte zu einer Parabel (nicht zu „spitz"):



Zu c): Diese Parabel hat gar keine Nullstelle. Der Scheitelpunkt ist hier der kleinste Wert, liegt mit S(0,5|0,75) aber oberhalb der x-Achse.

3. Aufgabe – OHNE GTR! **(4 Punkte)**

Die Zuordnungsvorschrift einer Parabel lautet $y = -x \cdot (x-10)$.

a) Ist diese Parabel nach oben oder nach unten geöffnet?
b) Bestimme alle Nullstellen dieser Parabel! Erläutere kurz, wie du das gemacht hast.
c) Bestimme mittels deiner beiden Nullstellen den Scheitelpunkt dieser Parabel!

Zu a): Die Parabel ist nach unten geöffnet (wegen dem Minus vor dem x).

Zu b): x1=0 und x2=10 sind die Nullstellen, denn ein Produkt wird Null, wenn mindestens ein Faktor null ist.

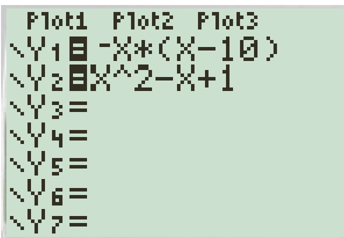
Der Scheitelpunkt muss genau zwischen den beiden Nullstellen liegen. Also ist für ihn x=5. Den y-Wert bekommen wir mit dem Term der Parabel, indem wir für x=5 einsetzen: y = -5*(5-10) = -5 * (-5) = 25. Also ist S(5|25).

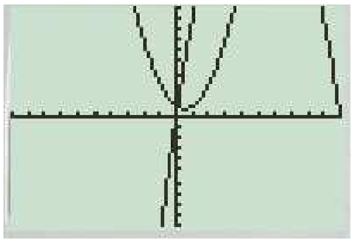
4. Aufgabe – MIT GTR! **(2 Punkte)**

Gegeben sind die beiden Parabeln mit den Termen p: $y = -x \cdot (x-10)$ bzw. q: $y = x^2 - x + 1$.

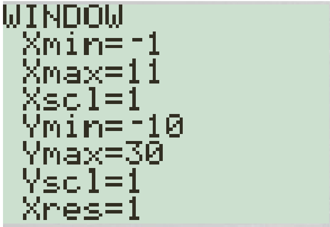
a) Berechne alle Schnittpunkte der beiden Parabeln.

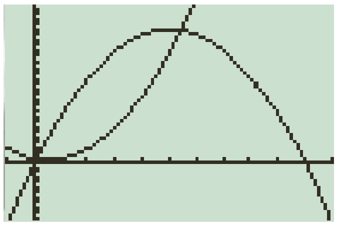
Das ist eine reine GTR-Aufgabe: Man gibt p und q in Y1 bzw. Y2 ein und geht auf GRAPH:





So toll kann man hier noch nichts erkennen. Das liegt am falsch eingestellten WINDOW (im Moment auf Standardwerte +/-10 für x bzw. y. Also muss man das verbessern. Der spannende Bereich scheint von 0 bis 10 zu gehen. Also wähle ich -1 bis 11 für x und für y erhöhe ich den Maximalwert auf 100. Dann merke ich, dass 100 doch zuviel ist und gehe runter auf 30:





Jetzt kann man die beiden Schnittpunkte sehr gut erkennen. Mit der blauen Taste komme ich auf CALC und dort gibt es 5: INTERSECT. Diesen Befehl muss ich zweimal ausführen, denn es gibt zwei Schnittpunkte. Durch den GUESS-Befehl kann ich den GTR dazu bringen, mir den jeweils näheren Schnittpunkt auszugeben. Ich erhalte gerundet diesen beiden Schnittpunkte: S(0,1|0,9) und T(5,4|24,8).

5. Aufgabe – OHNE GTR! **(4 Punkte)**
Vereinfache bzw. berechne die folgenden Terme mithilfe der drei binomischen Formeln!

a) $(a + 3)^2$ b) $17 \cdot 23$ c) $(s - k)^2$ d) $102 \cdot 98$

Zu a): 1. Bin. Formel: $a^2+2*a*3+3^2=a^2+6a+9$. Mehr geht nicht.

Zu b): 3. Bin. Formel: $(20-3)*(20+3) = 20^2-3^2 = 400-9 = 391$.

Zu c): 2. Bin. Formel: $s^2-2sk+k^2$. Hier kann man gar nichts vereinfachen!

Zu d): 3. Bin. Formel: $(100+2)*(100-2) = 100^2-2^2 = 10000-4 = 9996$.

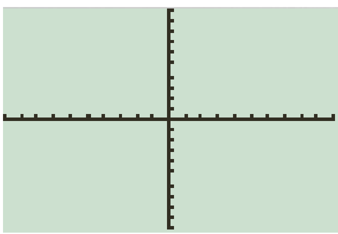
6. Aufgabe – MIT GTR (wenn es dir hilft) **(4 Punkte)**
Ist der Term $(n+1)^2 - n^2$ immer eine ungerade Zahl, wenn man für n jede natürliche Zahl einsetzen darf? Ein Beispiel wäre n=2: $(2+1)^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$. Begründe deine Antwort gut!

Hier gibt es ganz viele verschiedene Wege! Einer ist dieser: $(n+1)^2 = n^2+2n+1$. Davon zieht man n^2 ab, bleibt 2n+1. Nun kann n sein was es will, die Zahl 2n+1 ist immer ungerade. Wieso? Weil ist n gerade, ist 2n gerade. +1 und sie ist ungerade. War n ungerade, ist 2n trotzdem wieder gerade! Wieder +1 und die Zahl ist ungerade.

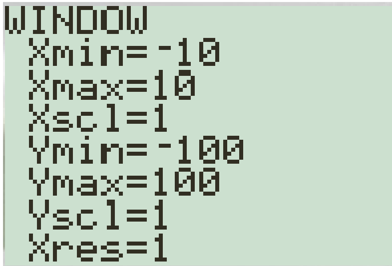
7. Aufgabe – ZUSATZ! **(+2 Punkte)**
Die Flugkurve einer Rakete wird durch die Parabel $y = -5 \cdot (x-20)^2 + 2000$ dargestellt. Dabei gibt x die Flugzeit in Sekunden an und die y-Werte die jeweilige Höhe der Rakete in Metern.

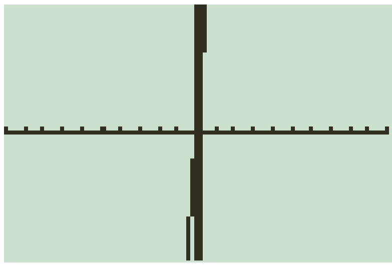
a) Bestimme die maximale Höhe, die die Rakete erreicht und gib den Zeitpunkt an, wann sie diese maximale Höhe erreicht.
b) Nach welcher Zeit erreicht die Rakete wieder den Boden?

Hier gibt es wieder sehr viele Wege. Ich zeige einen Standardweg. Zuerst einmal gebe ich den Term in Y1 ein und lass mir die Flugbahn anzeigen:

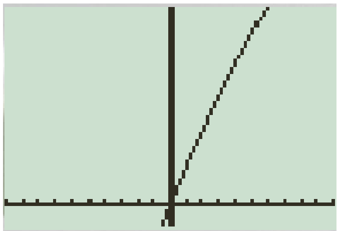


Das sieht auf den ersten Blick ziemlich bescheuert aus. Ist es aber nicht! Die Parabel ist einfach unglaublich hoch, denn es ist immerhin eine Rakete und es geht um ihre Flughöhe… und somit ist das WINDOW total falsch eingestellt (ich habe wieder die Standardeinstellungen +/- 10 für x bzw. für y gehabt). Wie geht man in einem solchen Fall vor?! Man erhöht erst einmal den y-Bereich um eine Größenordnung:

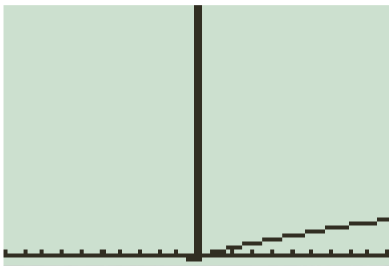




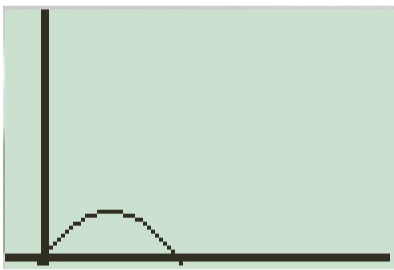
Und schon erkennt man eine Struktur. Die Parabel kann man aber noch lange nicht sehen! Also erhöhen wir wieder um eine Größenordnung und setzen den maximalen y-Wert auf 1000. nach unten brauchen wir nix zu tun, denn negative Flughöhen sind sowieso Quatsch…



Immer noch nicht gut, jetzt Ymax=10000:

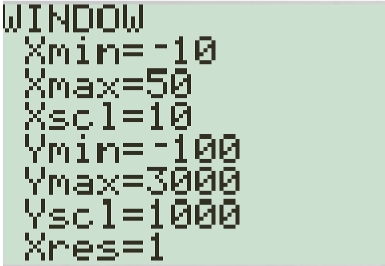


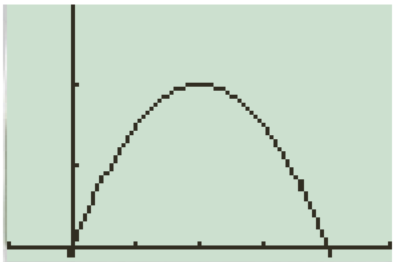
Aha! Nun kann man sogar höher gehen als die Parabel hoch ist. Aber jetzt muss man feststellen, dass man nicht die gesamte Parabel sieht; nach rechts fehlt einiges! Also erhöhen wir nach dem gleichen Schema Xmax auf 100:



Da ist sie! Allerdings klein und mit blöden Achsen (die sind so dick, weil der GTR je Einheit einen kleinen Balken zieht). Daher können wir unser Bild noch optimieren. Ich stelle z.B. für x den Bereich von -10 bis 50 ein, denn dann fällt der leere rechte

Bereich weg und für y setze ich den Ymax auf 3000, dann fällt der leere obere Bereich weg:





Jetzt sieht die Flugbahn sehr schön aus. Das xscl=10 bedeutet, dass die Striche auf der x-Achse 10er andeuten. Für y ist das Skaling 1000 und somit ist der erste Strich auf der y-Achse gerade 1000.

Interpretieren wir: Bei x=40 ist die Nullstelle, genauso wie (logischerweise) beim Start der Rakete. Das kann man notfall über CALC und 2:zero nachprüfen. Bei x=20 ist das Maximum bei y=2000, was man auch mit CALC und dann 4:maximum finden kann. x war die Zeit in Sekunden und y gibt die Flughöhe in Metern an. Also erreicht die Rakete nach 20s eine maximale Höhe von 2000m. Nach insgesamt 40s ist sie wieder auf dem Boden.