EI 10c M 2009-10	*MATHEMATIK* Extremalaufgaben (Randextrema)	$f'(x) = 0,$ $f''(x) \gtrless 0$

An diesen Extremalaufgaben kannst du noch einmal die Techniken einüben, die wir uns in den letzten Wochen erarbeitet haben. Die Entscheidung, ob nun ein lokales Minimum, Maximum oder „nur" ein Sattelpunkt vorliegt, wird in den Lösungen mit der zweiten Ableitung überprüft. Genausogut hätte man auf einen Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung untersuchen können.

Gegeben sind die zwei Funktionen f und g über diese beiden Terme:

$$f(x) = 0{,}5x^2+2 \text{ und } g(x) = x^2-2x+2$$

Wir möchten uns in dieser Aufgabe auf „relativ wenige" x-Werte beschränken und lassen für den Definitionsbereich nur die reellen Zahlen zwischen 0 und 4 für x zu.

Jetzt stellen wir uns die Frage, für welches x die Summe der Funktionswerte minimal wird, sprich, wann die „Summenfunktion" h(x) = f(x) + g(x) minimal wird. Zuerst einmal rechnen wir h aus:

$h(x) = f(x) + g(x) = (0{,}5x^2+2) + (x^2-2x+2) = 0{,}5x^2 + x^2 - 2x + 2 + 2 = 1{,}5x^2 - 2x + 4$

Die Aufgabe ist ja nun, dass h(x) möglichst klein wird auf dem Bereich von x = 0 … 4. Wie immer suchen wir einmal ein lokales Extremum über die erste Ableitung:

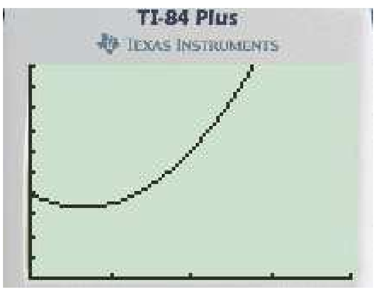
0 = h'(x) = 3x-2. Addiere 2 auf beiden Seiten: 2 = 3x. Teile durch 3 und man findet x1 = 2/3.

Nun ist zu prüfen, ob bei x1 = 2/3 ein Hoch-/Tief- oder Sattelpunkt vorliegt. Wir verwenden hier wie gesagt die 2. Ableitung, denn die ist einfach: h''(x)=3. Also ist auch h''(2/3)=3, denn die 2. Ableitung ist für alle x-Werte 3! Damit ist x1 = 2/3 ein Tiefpunkt und die Summenfunktion hat hier den kleinsten Wert von

$$h(2/3) = 1{,}5(2/3)^2 - 4/3 + 4 = 10/3 \approx 3{,}3.$$

An den Rändern des Definitionsbereiches 0 und 4 ist h übrigens so „dick": h(0)=4 und h(4)=20, wie man leicht nachrechnen kann. Warum hier die Ränder erwähnt sind? Mehr dazu später!

Um nun weiter zu üben, suchen wir die Stelle, an der die „Summenfunktion" h aus f und g **maximal** wird. Wieder setzen wir h'(x)=0. Wieder erhalten wir x1=2/3 und wieder testen wir beispielsweise mit der zweiten Ableitung und finden, dass bei x1 ein Tiefpunkt liegt. Wir müssen folgern, dass es bei unserer Summenfunktion **kein lokales Maximum** gibt! Kann nun die Summe von f und g überhaupt nicht maximal sein? Wir zeichnen die Funktion h mit dem GTR:



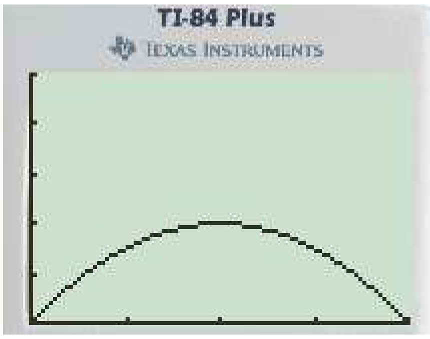
Das x, für das h(x) maximal wird, suchen wir. Es ist x=4. **Wir haben es vorher nicht gefunden!** Doch eigentlich sehen wir sofort, was hier los ist: Es gibt zwar kein **lokales** Maximum, sehr wohl aber ein **globales** und dieses liegt auf dem **Rand** unseres Definitionsbereiches, bei x=4! **Ist der Definitionsbereich eingeschränkt, dann muss man auch immer die Randwerte von x auf sogenannte „Randextrema" prüfen**, indem man einfach die Funktionswerte berechnet und mit den lokalen Maxima bzw. Minima vergleicht. Ist eigentlich kein großer Aufwand!

Und nun üben wir das nocheinmal, in dem wir jetzt die „Differenzfunktion" z(x) = f(x) – g(x) aufstellen und diese dann für x=0 … 4 maximieren und minimieren und in beiden Fällen auch einmal auf die Randwerte achtgeben. Berechnen wir vorerst z(x):

$$z(x) = f(x) - g(x) = (0{,}5x^2+2) - (x^2-2x+2) = 0{,}5x^2 - x^2 + 2x + 2 - 2 = -0{,}5x^2 + 2x.$$

Hier muss man aufpassen, weil die –2x in g(x) sich wegen dem weiteren Vorzeichen zu +2x wandeln!

Wir leiten z ab und erhalten $z'(x) = -x+2$. Damit gibt es nur einen Kandidaten, nämlich x2 = 2. Die zweite Ableitung lautet einfach $z''(x)= -1$ und so handelt es sich bei x2 um eine lokales Maximum. Es hat den Wert z(2)=2. Ein lokales Minimum gibt es gar nicht! Wie sieht die Funktion am Rand aus? Wir bilden z(0) und z(4) und erhalten z(0)=0 und z(4)=0. Damit müsste eigentlich zum einen bei x=2 die globale Maximalstelle liegen und die beiden Ränder 0 und 4 „teilen" sich den „ersten Platz" der Minimalstellen. Sowohl für 0, als auch für 4 wird die Differenzfunktion z global minimal! Wir können unseren GTR dazu benutzen, dies zu überprüfen:



In der Abbildung erkennt man, dass alle unsere Überlegungen richtig waren! Für x=2 ist die Funktion global maximiert und für x=0 wie auch für x=4 ist sie für den Bereich von 0 bis 4 minimal. Wäre der Bereich größer gewählt worden, hätten die neuen Ränder den kleinsten Wert gestellt.