EI 10c M 2009-10	*MATHEMATIK* **Lösung zur Probearbeit (für 3. Arbeit)**	

Die Lösungen beinhalten auch die Teilpunkte (den „Erwartungshorizont") der einzelnen Aufgaben. Dies soll dir helfen, ein Gefühl zu bekommen, wie stark einzelne Typen oder Denk- bzw. Rechenschritte ins Gewicht fallen! Dabei muss deinen Lösung NICHT so ausführlich sein, wie mache Lösung hier!

AUFGABE 1 **3 PUNKTE**

Bestimme für die folgenden Funktionen die Ableitung nach x. Der Definitionsbereich ist immer maximal gewählt. Du darfst dabei alle dir bekannten Ableitungsregeln anwenden.

a) $f(x) = (x-17)^2$
b) $b(x) = x - 7x^3 + x^2$
c) $g(x) = 3 - \sqrt{x}$
d) $p(x) = 250$
e) $h(x) = 13(x-1)^2$
f) $k(x) = -5/x^3$

Die Lösungen ganz kurz. Verwendet werden unsere 3 Ableitungsregeln, es geht aber mit allen 5 Regeln oft schneller:

a) $f(x) = (x-17)^2 = x^2 - 34x + 289$ und für die Ableitung bleibt: f '(x) = 2x – 34.
b) für die Ableitung bleibt: f '(x) = 1 – 21x² + 2x.
c) hier muss man die Wurzel umschreiben zu: $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Dann wendet man wieder die Potenzregel an und es entsteht: g'(x) $= -\frac{1}{2}x^{1/2-1} = -\frac{1}{2}x^{-1/2}$. Das reicht schon als Ergebnis. Schöner ist noch: g'(x) $= -\frac{1}{2}x^{-1/2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Übrigens gibt's hier für jede Aufgabe einfach einen halben Punkt.

AUFGABE 2 **3 PUNKTE**

Gegeben ist die Funktion g mit folgendem Funktionsterm:

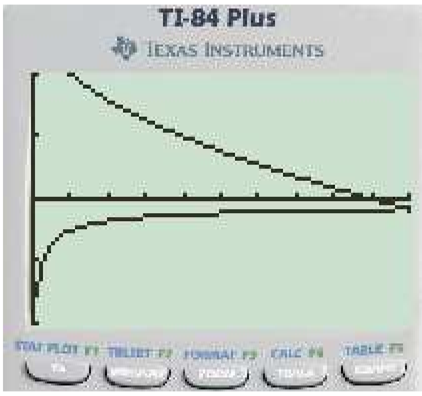
$$g(z) = 3 - \sqrt{z}$$

Gib den maximalen Definitionsbereich an. Zeichne das Schaubild der Funktion und der Ableitungsfunktion in das gleiche Schaubild ein!

Der Definitionsbereich ist das, was wir in die Gleichung für z einsetzen dürfen. Erst einmal stehen uns alle Zahlen zur Verfügung. Allerdings wird die Wurzel gezogen und daher darf z nicht negativ, sprich z muss 0 oder positiv sein. **Also umfasst der maximale Definitionsbereich alle positiven reellen Zahlen (Kommazahlen) und die 0.** Dafür gibt's einen Punkt!

Das zeichnen übernimmt der GTR. Auch kann man über <TABLE> die Wertetabelle ablesen und so einfach ins Heft abmalen. Allerdings sollen wir noch die Ableitungsfunktion malen, sodass wir die zuerst bestimmen werden. Wie in der ersten Aufgabe in der c) müssen wir auch hier die Wurzel so umschreiben: $\sqrt{z} = z^{1/2}$.

Dann merken wir sogar, dass es die gleiche Aufgabe wie 1c) ist … die Ableitung von g ist g'(z) $= -\frac{1}{2}z^{-1/2}$. Im GTR sind das dann so aus:



Für das Zeichnen der Funktion gibt's einen Punkt und auch für das Zeichnen der Ableitung.

AUFGABE 3 **5 PUNKTE**

Untersuche die Funktion f auf Nullstellen und Nullstellen der Ableitungsfunktion f '. Der Funktionsterm von f lautet:

$$f(x) = (x-2)(x+2)$$

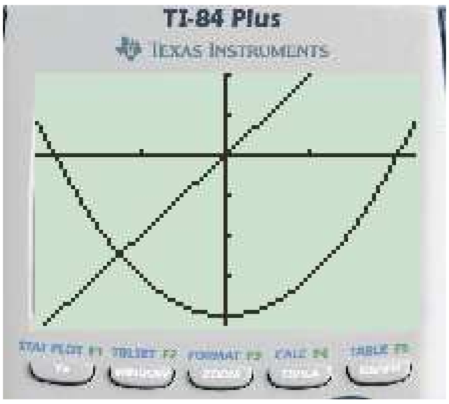
Wie sehen die Schaubilder von f bzw. von f ' aus? Zeichne sie in einem Bereich von x = –4 bis x = 4!

Diese Aufgabe gibt 5 Punkte, **weil du das gut können musst. ? ☹ ☺ ?**
Für die Nullstellen gibt's einen Punkt, fürs Ableiten auch, für die Nullstellen der Ableitung wieder einen Punkt und für jedes Schaubild noch einen.

Die Nullstellen von f sind in dieser Form schnell gefunden; x1=+2 und x2=-2. Man kann auch Ausmultiplizieren **oder einfach den GTR benutzen**. Wichtig ist, dass man *die Funktion* gleich Null setzt, denn dann erhält man *die Nullstellen der Funktion*!

Die Ableitung findet sich **nach dem Ausmultiplizieren**: f(x) = x^2 – 4 (es ist die 3. Binomische Formel). Dann ist f '(x)=2x und jetzt setzen wir dies gleich 0. Die Stelle x3=0 ist *die Nullstelle der Ableitung*.

Im GTR sieht es dann so aus:



Aufgabe 4 **2 Punkte**

Eine Arbeit ist mit folgenden Einzelnote ausgefallen; berechne den Schnitt und den Median:

1, 2, 1, 4, 6, 3+, 4, 2-3, 1-2, 3, 3-, 2+, 2+

Da man für den Median eine geordnete Notenliste benötigt, sortiere ich die obige Liste erst einmal (zur Abwechslung absteigend, ist aber egal!):

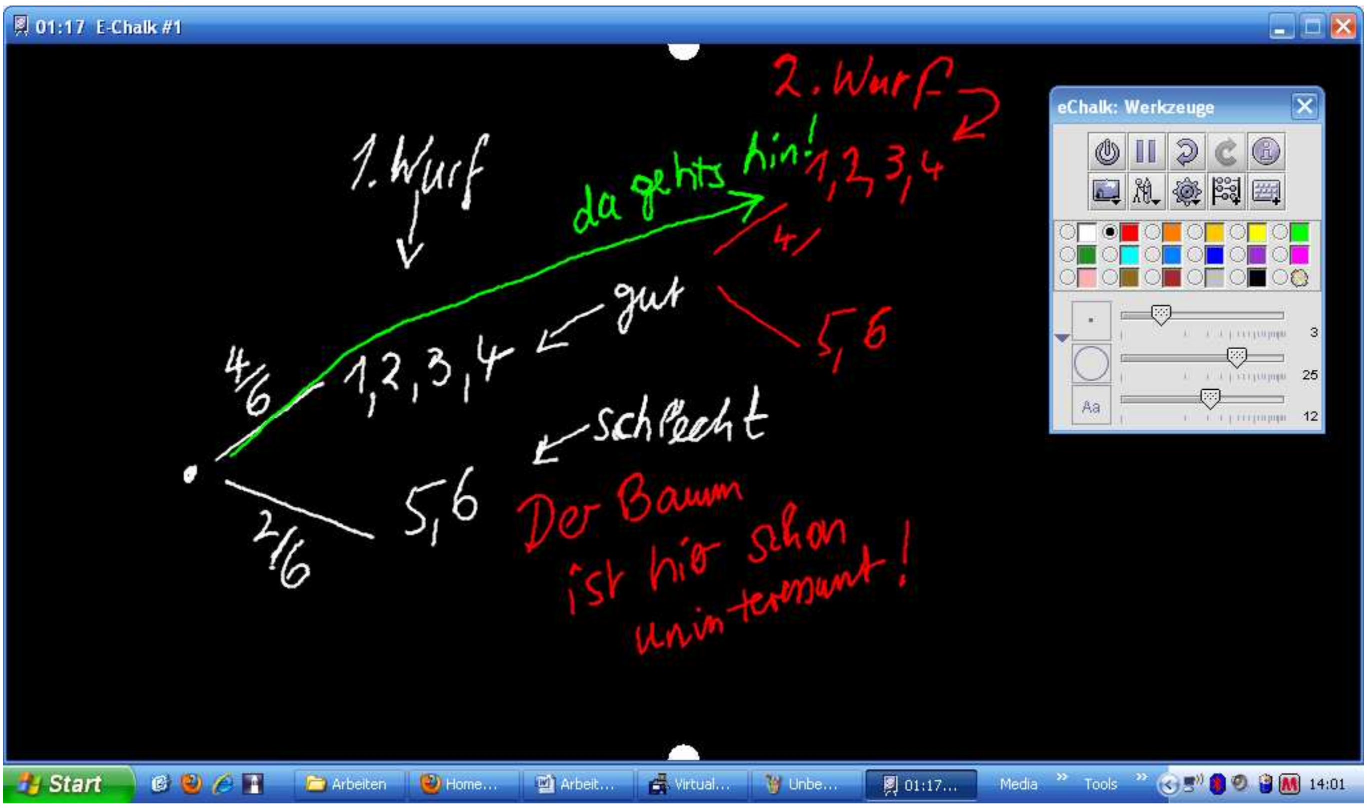
1, 1, 1-2, 2+, 2+, 2, 2-3, 3+, 3, 3-, 4, 4, 6

Nun streichen wir diese Pärchen nacheinander weg: 1,6 und dann 1,4 und 1-2,4 usw. Übrig bleibt… die 2-3. **Der Median ist also 2-3**. **Der Durchschnitt** ist hier die Summe aller Einzelnoten geteilt durch die „Länge" der Notenliste (hier: 13). Also: 34,5/13, was **etwa 2,65** entspricht. Beide Aufgabenteile geben einen Punkt.

Aufgabe 5 **4 Punkte**

Bei einem Würfelspiel werden immer 2 sechsseitige Würfel gleichzeitig geworfen. Eine Spielsituation entsteht, in der du keine 5 bzw. keine 6 würfeln darfst. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass du Erfolg hast und nur Zahlen von 1 bis 4 erwürfelst? Fertige hierzu einen „Entscheidungsbaum" an!

Wichtig ist, festzustellen, dass es *keinen Unterschied zwischen einem doppelten Wurf und zwei Würfen nacheinander gibt*. Das liegt daran, dass die Würfel „sich nicht kennen" und es ihnen ziemlich egal ist, ob ein anderer Würfel vor ihnen, nach ihnen oder zeitgleich geworfen wird… Damit zum Entscheidungsbaum, der auch gleich die Wahrscheinlichkeit von **p(keine 5 bzw. 6) = 16/36** bringen wird:



Wie gesagt, da die Würfe voneinander unabhängig sind, multipliziert man die Wahrscheinlichkeiten im Baum. So ergibt sich aus 4/6 mal 4/6 eben 16/36. **Nur in 16 von 36 möglichen Würfen fällt keine 5 oder 6**. Ich fand das etwas überraschend. Zur Punkteverteilung:

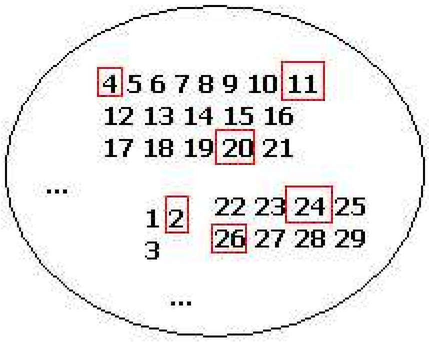
Erkennen, dass zu Multiplizieren ist, gibt einen Punkt, der Baum gibt 1 Punkt und das Ergebnis ebenso. Den 4. Punkt gibt's für eine saubere Notation.

AUFGABE 6 — 4 PUNKTE

Du spielst Lotto, bei dem 6 Zahlen von 1 bis 49 gezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, „6 Richtige" zu haben? Du bezahlst 10€ für dein Spiel, als Gewinn sind 50 Millionen € ausgelobt. Lohnt sich das Spiel für dich?

Ich habe einen „Pool" von 49 Zahlen, in dem 6 „gute" Zahlen „schwimmen":

Im ersten „Ziehen" muss ich eine der 6 guten Zahlen erwischen; p=6/49. Im zweiten Schritt gibt's noch 5 gute auf 48 (eine ist ja raus…); p=5/48. Im dritten Schritt gilt dann p=4/47, dann p=3/46, p=2/45 und schließlich ist im letzten Schritt von 44 verbleibenden Zahlen nur noch 1 gute übrig, also p=1/44. Da die Schritte nacheinander durchgeführt werden, multipliziere ich die Ergebnisse und erhalte eine winzige Zahl. Im GTR:



Das Ergebnis ist eine 7, aber vorher kommen 8 Nuller: 0,00000007, spricht ich müsste es achtmal mit 10 multiplizieren, um auf 7 zu kommen… Oder anders ausgedrückt: **In 7 von 100 Millionen Fällen habe ich Erfolg!** Ziemlich mager. Ob sich das Spiel für mich lohnt? Eher nicht, aber wieso eigentlich? Das beantwortet der Erwartungswert. In 100 Millionen Fällen zahle ich 10€, um dann 7 Mal den Jackpot ein-zustreichen. Ausgaben: 1000 Millionen €, Einnahmen: 350 Mio. €. Somit ist mein Erwartungswert negativ: **Je 100 Mio. Spiele erwartet mich ein Verlust von etwa 650 Mio. €.** Macht je Einzelspiel „nur" 3,50 €, aber es ist auch nicht gut, wenn von 10€ nur 6,50€ übrig bleiben … Die Punkteverteilung: 2 Punkte für die Berechnung der Wahr-scheinlichkeit, 1 Punkt für den Erwartungswert und einen Punkt für die Beantwortung der Zusatzfrage.

AUFGABE 7 — 3 PUNKTE

Ein Würfel gilt als „gezinkt", wenn er beim Würfeln eine Zahl bevorzugt anzeigt und als „ideal", wenn er alle Zahlen gleichhäufig anzeigt. Erkläre kurz, was „gleichhäufig" meint! Du bist Casinobesitzer und ein Spieler möchte mit seinen eigenen drei Würfeln Sic Bo spielen. Wie könntest du herausfinden, welche Art von Würfeln der Spieler verwendet?

Gleichhäufig meint, dass der Erwartungswert jeder der 6 Zahlen gleich ist. Das muss nicht heißen, dass bei bspw. 1000 Würfen immer dieselbe Anzahl 6er wie 2er fällt. Aber ungefähr sollten die Anzahlen übereinstimmen, alles andere wäre sehr unwahrscheinlich (kann aber vor-kommen). Nun möchte ein Spieler seine eigenen Würfel einsetzen. Ich könnte seine Würfel nehmen und sehr häufig (1000 mal, besser 100000000 mal, eigentlich so oft es irgend geht!) mit ihnen würfeln. Fallen alle Zahlen etwa gleich oft, dann sollten die Würfel nicht gezinkt sein. Punkteverteilung: 1 Punkt für die Erklärung, 2 Punkte für ein mögliches Testverfahren.