EI 10c M 2009-10	MATHEMATIK – 3. ARBEIT **Übungsaufgaben zur 3. Arbeit**	

Die Lösungen zu den Aufgaben sind in einem weiteren Link zu finden!

*	=	**Basics**
**	=	**sollte klappen!**
***	=	**Schwere Zusatzaufgabe (von der Sorte kommt höchstens eine Aufgabe)**

Viel Erfolg beim Üben!

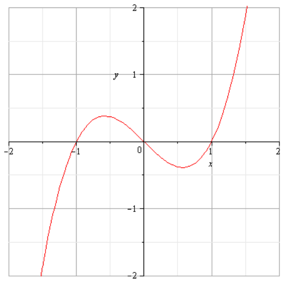
AUFGABE 1**:

Gegeben ist die Funktion f mit folgendem Funktionsterm:

$$f(x) = x^3 - x$$

Gib den maximalen Definitionsbereich an. Erstelle ein Schaubild der Funktion und berechne die Ableitungsfunktion. Zeichne diese Ableitungsfunktion in das gleiche Schaubild ein!

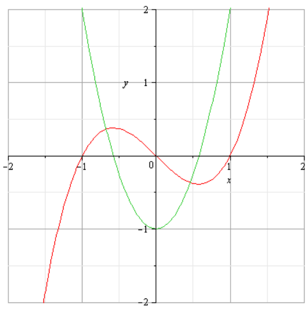
Der maximale Definitionsbereich umfasst alle reellen Zahlen (Kommazahlen), da nirgends durch Null geteilt wird o.ä. Verbotenes geschieht.



Die Ableitungsfunktion lautet:

$$f(x) = 3x^2 - 1$$

Und beide Schaubilder auf einmal:



AUFGABE 2*:

Gegeben sind die folgenden Funktionsterme der Funktionen f, g, h, tut, t und p:

$$\boldsymbol{f}(x) = x^3 + 1, \boldsymbol{g}(x) = x^2, \boldsymbol{h}(bla) = 200 - \sqrt{bla}, \boldsymbol{tut}(x) = 3 + x, \boldsymbol{t}(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1, \boldsymbol{p}(z) = \frac{2}{z^3}$$

Gib jeweils den maximalen Definitionsbereich an und berechne die Terme der jeweiligen Ableitungsfunktionen.

Die Funktionen **f**, **g**, **tut** und **t** haben „vollen Definitionsbereich". In **h** darf man wegen der Wurzel nur positive Zahlen inklusive der Null einsetzen. In **p** ist nur die Null verboten.

$$\boldsymbol{f}'(x) = 3x^2, \boldsymbol{g}'(x) = 2x, \boldsymbol{h}'(bla) = -\frac{1}{2\sqrt{bla}}, \boldsymbol{tut}'(x) = 1, \boldsymbol{t}(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1, \boldsymbol{p}(z) = -\frac{6}{z^4}$$

AUFGABE 3:**

Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die durch den Punkt P(2|3) geht und eine Steigung von m=2 besitzt.

Die allgemeine Geradengleichung lautet y = m·x + c, also hier y = 2·x + c. Nun soll der Punkt P auf der Gerade liegen und die Punktprobe 3 = 2·2 + c liefert „sofort" c=3 – 4= –1. Somit lautet die gesuchte Gerade: y = 2x – 1.

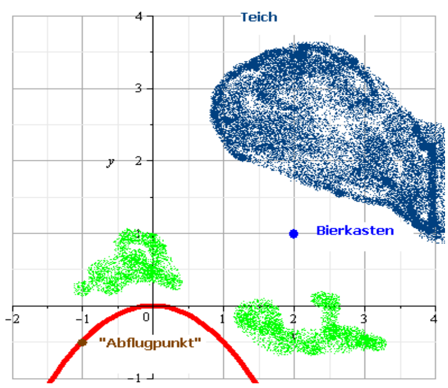
AUFGABE 4:**

Gegeben ist die Parabel mit $p(x)=(x-1)^2+2$. Bestimmt die Steigung für den x-Wert 2 und stelle anschließend die zugehörige Tangentengleichung auf.

Um die Steigung für einen einzelnen x-Wert zu berechnen müssen wir diesen in die Ableitungsfunktion einsetzen. Also leiten wir **p** erst einmal ab! **p'(x) = 2(x-1) = 2x – 2**. Jetzt bilden wir **p'(2) = 4 – 2 = 2**. Die Tangente ist die Gerade, die durch den Punkt des Schaubildes von p mit x-Wert 2 geht und die Steigung **m=2** aufweist. Also bestimmen wir den **Punkt P(2|?),** indem wir in die Ausgangsfunktion x=2 setzen: **$p(2) = (2-1)^2+2 = 1+2 = 3$**. Wer es merkt hier schon merkt; der Punkt und die Steigung entsprechen genau den Angaben aus Aufgabe 3 und damit ist die Lösung natürlich auch dieselbe!

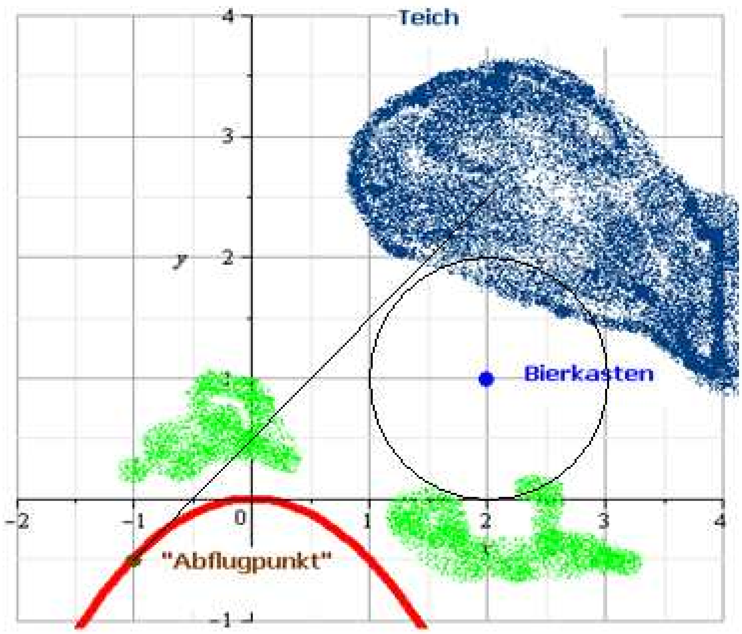
AUFGABE 5*:**

In einem Autorennen verliert das Fahrzeug TEAM RACING in der gefürchteten Schlordneife-Kurve den Grip und macht den Abflug von der Rennstrecke. Eine Person erklärt später in einem Zeitungsinterview, das Auto sei *„voll über misch geflogge!"* und möchte €1000 Schmerzensgeld für diesen *„Riesenschregg"*. Das TEAM RACING will den Unfallhergang rekonstruieren. Die „Abflugstelle" ist wegen Reifenspuren bekannt, doch da das Auto in einem Teich landete und bereits geborgen wurde, ist der „Aufschlagpunkt" nicht mehr zu rekonstruieren. Der Standpunkt der Person zum Zeitpunkt des Unfalls ist wiederum bekannt, da sich der Zuschauer einen umgedrehten Bierkasten als Sitz hingestellt hatte. Ach ja, dem Fahrer geht es bis auf eine Gehirnerschütterung gut, er kann sich aber an nichts mehr erinnern… Du hast den Auftrag, als Gutachter zu entscheiden, ob der Mann in Gefahr war und das Schmerzensgeld zu zahlen ist. Das Gericht befindet, dass bei einem Abstand von mehr als 10 Metern kein Schmerzensgeld fällig wird. Team Racing hat in deinem Auftrag bereits eine „Geländekarte" erstellt (1 Einheit = 10 Meter) und erwartet dein Gutachten!



Diese Aufgabe ist sehr umfangreich. Andererseits ist sie mit unseren Hilfsmitteln recht einfach lösbar! Trotzdem bleibt es eine Transfer- und Zusatzaufgabe!!!

Erst einmal müssen wir das Problem ganz mathematisieren, die Karte ist schon sehr hilfreich. Wir lesen den Standpunkt des Zuschauers mit P(2|1) ab und stellen eine Straßenfunktion auf, die hier relativ leicht als Parabel $p(x)=-0.5x^2$ zu bestimmen ist. Das es keine Normalparabel ist, sieht man an den Funktionswerten für x=-1 und x=1! Nun fliegt das Auto im Punkt Q(-1|-0.5) aus der Kurve. Dabei verlässt das Auto die Strasse tangential. Das zu wissen setzt eigentlich Physik voraus, ich hoffe, euch ist das bereits bekannt. Aber schließlich gibt es auch diese Lösung der Aufgaben! Nun muss man also die Tangente von Q aufstellen und dazu p ableiten. $p'(x)=-x$ und damit ist die Steigung im Punkt Q einfach m=1. Damit findet sich die Tangente als: $y=x+0.5$, was sich auch aus dem Schaubild ablesen lässt. Nun bleibt zu klären, ob das Auto dem Zuschauer auf 10 Meter nahe gekommen ist. Dies kann man auch mathematisch lösen, allerdings ist es wohl einfacher, einen Kreis mit Radius r=1 in die Zeichnung um den Punkt P zu schlagen und einfach zu schaun, ob dieser sich mit der Geraden $y=x+0.5$ schneidet!



Offensichtlich ist dem nicht so und der Zaungast erhält kein Schmerzensgeld. Wie gesagt, eine so umfangreiche Aufgabe kommt nicht in der Arbeit dran! Aber es wäre toll, wenn ihr sie lösen könntet.

AUFGABE 6*:

Die Klassenarbeit der 10c vom 26.02.2010 fällt mit einem sagenhaften Schnitt von 1,2 aus. Der Lehrer lobt vor dem Austeilen die gesamte Klasse. Der neue und damit 25. Schüler und Mitschreiber Ste. Ha. bricht nach Rückgabe seiner Arbeit allerdings sofort in Tränen aus und lässt sich nur schwer beruhigen. Wie kann das sein?

Ein Schnitt von 1,2 ist zwar ein guter Durchschnitt, jedoch sind Abweichungen möglich. Beispielsweise könnten alle 24 Schüler eine 1 geschrieben haben und Ste. Ha. eine 6. Denn dann wäre 24 mal 1 plus 6 gleich 30 und 30/24=1,2.

AUFGABE 7*:

Am Schuljahresende diskutieren Lehrer und Schüler über die Note in Französisch. Der Lehrer meint, dass schriftlich (1,2,6,1) die Note 2,5 zu erteilen ist und da der Schüler phasenweise wirklich unaufmerksam war, ist die gesamte Mitarbeit nicht mit „Gut" zu benoten. Daher wird er eine „3" ins Zeugnis schreiben. Was kann der Schüler entgegnen? Argumentiere mathematisch fundiert!

Zuerst einmal lässt sich die Rechnung mathematisch nicht halten, da bei Noten keine Abstufung wie bei Zahlen (gleich Abstände, Kommazahlen) möglich ist. Also macht die Schnittbildung insgesamt eigentlich gar keinen Sinn. Errechnet man den Median, stünde der Schüler sogar zwischen 1 und 2, was wohl auch mehr den Tatsachen entsprechen wird. Somit wäre auch bei einer mündlichen 3 die Endnote „Gut" absolut vertretbar. Vielleicht lässt sich der Lehrer dadurch überzeugen!

AUFGABE 8*:

Eine Arbeit ist mit folgenden Einzelnote ausgefallen; berechne den Schnitt und den Median:

1, 2, 1, 4, 6, 3+, 4, 2-3, 1-2, 3, 3-, 2+, 2+

Der Mittelwert berrechnet sich hier als Summe von 13 Einzelnoten geteilt durch 13 zu (gerundet) 2,7. Der Median wäre der mittlere Eintrag (13 ist gottseidank eine ungerade Zahl) der geordneten Notenliste [1,1,1-2,2+,2+,2,2-3,3+,3,3-,4,4,6], also 2-3 oder 2,5.

AUFGABE 9**:

Deine Mitschülerin behauptet, dass sie deine Gedanken lesesn kann und bietet dir folgende Wette an: Du denkst dir eine Zahl zwischen 1 und 10 und sie rät sie. Dies wird dreimal wiederholt. Wenn sie deine Zahlen errät, dann bist du ihr 100€ schuldig. Liegt sie falsch, gibt sie dir 1€. Überlege dir, ob es eine gute Wette für dich ist. Schlägst du ein?

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Durchgang die richtige Zahl zu treffen, liegt bei p=1/10. Vorausgesetzt, die Mitschülerin kann keine Gedanken lesen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dreimal nacheinander zu treffen, nur 1/10 mal 1/10 mal 1/10. Also nur in einem von 1000 versuchen ist zu erwarten, dass die Mitschülerin „trifft". Somit gewinnt sie einmalig €100 und verliert 999€. In der Summe sollte man nach 1000 Spielen mit einem Plus von 899€ herauskommen. Man sollte spielen!

AUFGABE 10**:

Du spielst das Spiel und deine Mitschülerin verliert. Sie ärgert sich und modifiziert ihr Angebot; für jede Zahl, die sie errät, bekommt sie 10€. Du erhältst wieder 1€, falls sie keine Zahl erraten kann. Wie beurteilst du dieses Spiel?

Dieses Spiel ist etwas komplizierter und will man es genau wissen, so lohnt es sich hier sicherlich, einen „Entscheidungsbaum" zu malen. Versuch das einmal! Doch allein schon, wenn man sich überlegt, dass die Mitschülerin bei jedem Durchgang zwar nur zu einem Zehntel trifft, dann aber bereits €10 kassiert, sollte uns dazu bringen, nicht zu spielen. Denn ihr „Gewinn-Erwartungswert" liegt schon bei 1/10 mal 10€, also bei 1€. Und da es drei Durchgänge gibt, hat sie schon einen erwarteten Gewinn von 3€. Dass sie dann vielleicht noch einen Euro abgeben muss, ändert nichts daran, dass sie im Schnitt gewinnt.

AUFGABE 11*:

Du bist Geheimagent und möchtest eine steile Felswand hinauf klettern. In deiner Ausrüstung findest du zwei Wurfanker-Pistolen. In der beiliegenden Bedienungsanleitung findet sich dieser

Hinweis: *„Leider bricht der UltraLight-Wurfanker bei längerem Klettern mit einer Wahrscheinlichkeit von 10%."* Du feuerst beide Wurfanker ab und kletterst, an beiden Seilen gesichert, mutig nach oben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass du dort ankommst?

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Anker reißen, beträgt nur 1/10 mal 1/10! Also stürzt man „nur" in einem von 100 Fällen ab. Je nachdem, was die Situation erfordert, ist abzuwägen, ob man dieses Risiko eingeht! Diese Aufgabe lässt sich übrigens bspw. auf Flugzeuge übertragen, die mehrere Motoren haben, aber eigentlich nur einen zum Fliegen brauchen. So funktionieren generell Sicherheitssysteme!

AUFGABE 12*:**

Du bist Finanzoptimierer bei Ernst & Young und sollst einer Fluggesellschaft beim Optimieren der Preise zur Seite stehen. Die Flugzeugflotte besteht aus nur einem Typ Flugzeug, das 100 gleichwertige Plätze á €1000 bietet. Aus den Daten der Airline entnimmst du, das durchschnittlich 90 Fluggäste auch wirklich boarden und somit im Schnitt 10 Plätze leer bleiben. Du gibst den Rat, das Flugzeug zu überbuchen. Man entgegnet, dass es üblich ist, Fluggäste, die nicht mehr in den Flieger passen, mit €2000 zu entschädigen. Stört das? Wieviele Karten würdest du mehr verkaufen und warum? Was geschieht im „worst case", also wenn alle verkauften Karten eingelöst werden würden?

Auch diese Aufgabe ist sehr schwierig! Zuerst einmal könnte man 10 Plätze mehr verkaufen, da von 100 Plätzen im Schnitt 10 Plätze frei bleiben. Allerdings wird von den 10 Käufern wohl wieder einer nicht kommen! Also könnte man sogar 11 zusätzliche Tickets anbieten. Bei einer „Ausfallwahrscheinlichkeit" von 10% werden dann 0,9 mal 111 Plätze besetzt, was 99,9 Plätzen entspricht. Perfekt! Das Flugzeug ist praktisch voll besetzt. Nun können allerdings von den 111 „Fluggästen" wirklich 111 Personen kommen. Dann müssen 11 Personen á €2000 entschädigt werden, was immerhin 22.000€ entspricht. Trotz dieses worst case wird es dann nicht „teuer" für die Fluggesellschaft, da sie mit 111 verkauften Plätzen jedes Mal 11 mal 1000€ zusätzlich einnimmt, was 11.000€ entspricht. So haben sie nach 2 „normalen" Flugtagen den worst case wieder finanziert! *Natürlich gibt es seltsame Konstellationen, bei denen es nicht funktioniert, bspw. wenn in neun von 10 Fällen alle und einmal 0 Leute gekommen sind. Dann „täuscht" ein Schnitt von 10% Ausfallwahrscheinlichkeit natürlich, aber so etwas kann man vorher merken … Um solche Fälle mathematisch zu beschreiben, benötigt man die sogenante Varianz, das ist die mittlere Abweichung vom Mittelwert, aber das begegnet euch erst (wenn überhaupt) an der Uni.*