EI 10c
M

2009-10

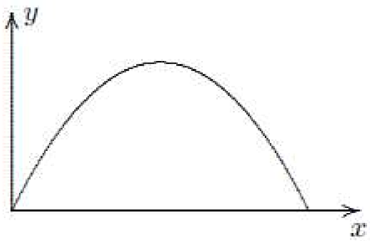
MATHEMATIK

Probeaufgaben

Hier einige Probeaufgaben. Denkt in der Arbeit immer daran, gut zu dokumentieren, was Ihr tut, denn so kann ich es einfacher nachvollziehen. Das ist insbesondere wichtig, wenn Ihr Fehler macht. Und Fehler macht jeder, also geht kein unnötiges Risiko ein!

Aufgabe 3 (Parabel Anwendungsaufgabe)

3. Der Sprung eines Frosches wird durch die Parabel
$y = -\frac{1}{30}x^2 + 2x$ (Sprungweite x, Höhe y, in cm) beschrieben.
   a) Wie weit und wie hoch springt der Frosch?
   b) Nach welcher Weite hat er die Höhe $h = \frac{45}{2}$ erreicht?



Erst einmal gibt es hier hundert Möglichkeiten, die Aufgabe zu lösen. Ich wähle nicht die einfachste Methode, sondern die, die am häufigsten funktioniert:

a) Wie weit: von Nullstelle zu Nullstelle. Die berechnen wir schnell (über abc-Formel mit a=-1/30, b=2 und c=0) zu x1=0 und x2=60. Die Differenz ist damit 60 (cm).

a) Wie hoch: Eine Parabel ist IMMER symmetrisch zur Achse, die durch den Scheitelpunkt geht. Den kennen wir damit aber schon! Denn auch die Nullstellen liegen symmetrisch um den Scheitelpunkt und so muss dieser den x-Wert x=30 haben!!!
Und so findet sich y=-1/30*(30)²+2*30=-30+60=30 (cm). Die maximale Höhe, die der Frosch erreicht, sind also 30 cm.

b) Achtung: Fangfrage. Eine Parabel nimmt ihre y-Werte immer zweimal an (wegen der Symmetrie). Also gibt es zwei Lösungen. Wir setzen einfach mal y=45/2 ein:

45/2 = -1/30*x² + 2*x. Das müssen wir nach x auflösen. Sieht schwer aus, aber wir können wieder auf etwas Bekanntes zurück greifen; die abc-Formel! Denn bringen wir 45/2 auf die rechte Seite der Gleichung, dann suchen wir eigentlich nur wieder Nullstellen und das können wir:

0 = -1/30*x² + 2*x - 45/2. Also a=-1/30, b=2 und c=-45/2. Dann gibt uns die abc-Formel auch unsere 2 Lösungen: x1=15 und x2=45. Auch diese sind wieder symmetrisch um den x-Wert des Scheitelpunktes angeordnet…

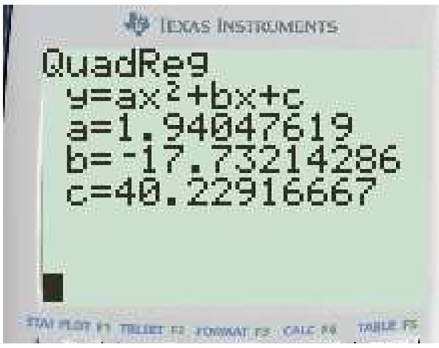
Aufgabe 4 (Parabel Anwendungsaufgabe)

Ein Auto bremst schnell vor einem Zebrastreifen ab. Dabei ergibt sich folgende Tabelle für das Weg-Zeit-Diagramm (der Weg wird vom Zebrastreifen aus gemessen):

Weg [m]	40	32	25	17,5	12,5	8	4,5	2
Zeit [s]	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5

Nach wievielen Sekunden erreicht das Auto den Zebrastreifen? Nimm an, dass es sich um ein quadratisches Weg-Zeit-Gesetz handelt.

Diese Aufgabe ist nicht ganz einfach, aber machbar. Zuerst muss man sich klar machen, dass alle Messpunkte auf einer Parabel liegen. Entweder bekommt man die, indem man die Liste in den GTR eingibt, oder durch Punktproben. Wir nehmen den GTR:



Und so haben wir unsere Parabel gefunden. Die Nullstellen liegen etwa bei 4s und bei 5s. Also kommt das Auto nach 4s zum Zebrastreifen. Danach macht es keinen Sinn mehr, eine Parabel zu verwenden.

Aufgabe 5 (Parabel)

Die Parabel mit der Gleichung $y = (x-3)^2+4$ wird an der Geraden $x = 3$ gespiegelt. Zeichne beide Funktionen in ein angemessenes Schaubild und gib anschließend die Gleichung der gespiegelten Parabel an. Die Ausgangsparabel wird diesmal an der x-Achse gespiegelt. Zeichne eine Skizze und gib die Funktionsgleichung der Spiegelung an!

Bei der ersten Spiegelung geschieht gar nichts, denn wir spiegeln genau an der Symmetrieachse! Die Parabel geht bei dieser Spiegelung „in sich selbst über“. Bei der zweiten Spiegelung passiert allerdings etwas. Zum einen kehrt sich das Vorzeichen vor dem quadratischen Term um, zum anderen wandert der Scheitelpunkt von $S(3|4)$ auf $S^*(3|-4)$. Und damit muss die gespiegelte Parabel folgender Gleichung genügen: $y = -(x-3)^2 - 4$.

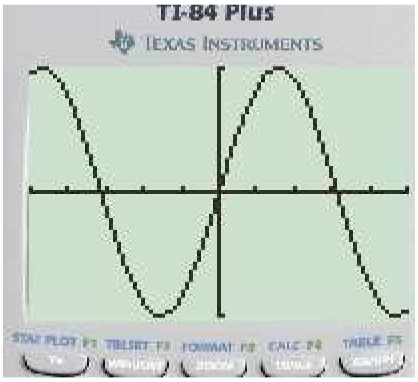
Aufgabe 7 (Gerade: „Anwendungsaufgabe“)

Jedes Jahr ziehen 4 Mitglieder der Großfamilie Müller aus Unterurselsdorf in die Stadt um. Der Clan besteht dieses Jahr (2009) noch aus 32 Mitgliedern. Wann ist zu erwarten, dass kein Müller mehr in Unterurselsdorf lebt?

Am Anfang haben wir 32 Mitglieder und je Jahr gehen 4. Also wäre für $t=0$ der Bestand $y=32$, für $t=1$ (Jahre) wäre $y=32-4=28$. Stellt man damit eine Geradengleichung auf, findet sich sofort $c=32$ und dann $28=m+32$, also $m=-4$ (macht ja Sinn, wenn man ans Steigungsdreieck denkt).
Um herauszufinden, wann alle Müllers weggezogen sind, muss man die Nullstelle unserer Funktion finden: $0=-4x+32$ und damit ist $x=8$. Also im Jahr $2009+8=2017$.

Aufgabe 9 (Sinus Anwendungsaufgabe): kommt nicht dran, ist also Zusatz!!!
Auf Sylt ist am Strand um 9 Uhr morgens Ebbe (Wasserstand 0m) und um 16 Uhr ist Flut (Wasserstand 2m). Sieben Stunden später herrscht wieder Ebbe, dann wieder Flut usw. Kannst du abschätzen, wann du morgens baden kannst, wenn dir eine Wasserhöhe von 1m ausreicht? Und wie lange kannst du im Wasser bleiben? Gehe dabei davon aus, dass sich der Tidenhub mit einer Sinusfunktion beschreiben lässt. Fertige eine kleine Zeichnung an, die den Tidenhub am Strand beschreibt.

Um einen ersten Ansatz zu haben, brauchen wir eine Vorstellung vom Sinus, denn den sollen wir hier anwenden. Gezeichnet wird er über <Y=> oben links am GTR. Dort einfach <SIN> drücken, <X>, <)> und <ENTER>. Dann in <MODE> noch auf <RADIAN> umstellen und den Zeichenbereich auf y=-1…1 und x=-5…5 oder so ähnlich festlegen. Dann kommt dieses Bild:



Jetzt müssen wir das Bild noch auf unsere Aufgabe anwenden! Im Ursprung auf dem Display ist es ja gerade 9 Uhr. Um 16 Uhr ist es in der Zeichnung etwa 1.57… (weil bei 90° der Sinus 1 wird und da <RADIAN> eingestellt ist, sind 90° eben Pi/2). Dann ist wieder um 16+7=23 Uhr Ebbe, auf dem Display ist es dann Pi=3.14… usw.

Wann kann ich baden? Wenn die Hälfte der maximalen Wassertiefe, also 1m, erreicht ist. Auf dem Display muss also der Sinus (=y-Wert!) gerade 0.5 werden. Ihr könntet nun die Kurve entlangfahren, reinzoomen oder ähnliches oder einfach WISSEN (merken!), dass sin(30°)=0.5 gilt. Für <RADIAN> ist das bei Pi/6=0.52… der Fall. Man sieht das auch einigermaßen in der Abbildung.

Ich kann nun solange baden, bis der Wasserstand WIEDER 1m ist, also wieder sin(Winkel)=0.5 gilt. Das ist bei 150° der Fall (warum?). Dann kann ich also „zwischen" 30° und 150° baden. Klingt etwas albern, aber der Winkel bzw. das Bogenmaß (30° - Pi/6, 150° - 5/6*Pi) entsprechen ja realen Uhrzeiten.

Die „Länge" ist übrigens einfach 4/6*Pi, also 4/6*14 Stunden, denn Pi entspricht genau der Zeit von Ebbe zu Ebbe und das sind 2*7=14 Stunden laut Aufgabe. Somit kann ich etwa 9 Stunden baden.

Die Uhrzeit, ab wann das möglich ist, ist „Pi/6 nach 9 Uhr", also 14 Stunden/6=2.33… Stunden. Somit kann ich ab etwa 11.20 Uhr planschen und muss erst nach 20 Uhr aus dem Wasser.