EI 10c M 2009-10	*MATHEMATIK* Lösungen zur Probearbeit zur 4. Arbeit	Teil 2

Hier nun die Lösungen zum zweiten Teil der Probearbeit!

Aufgabe 4:

Stelle für den Punkt P(1|f(1)) und die Funktion $f(x)=4x^3-3x^2+7x-5$ die Tangentengleichung auf.

Aufgabe 4 Lösung:

Zuerst einmal ist der Punkt vollständig zu bestimmen. Dafür ist f(1) auszurechnen. Es ist f(1)=4-3+7-5=3. Also geht es um P(1|3). Eine Tangente ist eine Gerade. Also brauchen wir neben einem Punkt noch eine Steigung oder einen zweiten Punkt der Geraden, um diese eindeutig festzulegen. Beim Tangentenbestimmen ist es immer einfach, die Steigung m über die Ableitung zu bekommen, denn es gilt ja einfach m=f '(1). Also leiten wir f(xI ab und erhalten $f'(x)=12x^2-6x+7$. Für x=1 ergibt sich m=f '(1)=12-6+7=13. Somit haben wir eine Steigung und einen Punkt. Nun setzen wir y=mx+c an, setzen direkt m=13 ein und erhalten: y=13x+c. Da P auf der Geraden liegt, muss 3=13+c gelten. Denn für x=1 ist ja y=13! Damit ist c=-10 und die Tangentengleichung insgesamt y=13x-10.

Aufgabe 5:

Die Zahl 60 ist so in zwei positive Summanden x und y zu zerlegen, dass das Produkt xy^2 maximal ist.

Aufgabe 5 Lösung:

60 zerlegt in zwei Summanden schreibt sich ganz allgemein als 60=x+y. Man kann hier y durch x ausdrücken: y=60-x. Dabei ist x zwischen 0 und 60 erlaubt, damit y noch positiv sein kann. Wir haben also im Bereich 0 bis 60 das Maximum des Produkts $p(x)=x(60-x)^2$ zu bestimmen. Mit dem GTR ist das ganz einfach. Wir geben das Produkt in Y1 ein und gehen auf <GRAPH> hier wird es jedoch erst einmal nichts zu sehen geben, da das Window wohl komplett falsch eingestellt ist. Setzt man nämlich bspw. die Zahl 30 in p ein, so erhält man $p(30)=30(60-30)^2=30^3=27000$! Also muss man das Window für x von 0 bis 60 und für y von 0 bis bspw. 50000 einstellen mit entsprechender Schrittweite. Über <CALC> und <Max> findet sich x=20 als Lösung. Gerne kann man diese Aufgabe auch ohne GTR lösen (geht wie die claim-Aufgabe oder die Dosenaufgabe), aber es ist gar nicht nötig.

Aufgabe 6:

Ein quaderförmiger, nach oben offener Container ist halb so hoch wie breit und soll ein Fassungsvermögen von 108 m^3 besitzen. Welche Maße hat er, wenn zur Herstellung möglichst wenig Material verbraucht werden soll?

Aufgabe 6 Lösung:

Der Container hat also eine Höhe h und eine Breite b, für die gilt b=2h. Die Tiefe t ist noch nicht gegeben. Allerdings ist das Volumen fest vorgegeben mit V=108 m^3. Das Volumen errechnet sich wie bekannt als Volumen = Höhe mal Breite mal Tiefe:

$$V(h,b,t) = h \cdot b \cdot t = 2h^2t = 108$$

Durch das Weglassen der Einheiten haben wir uns auf Meter als Längeneinheit festgelegt, was ja ganz praktisch scheint. Weil wir die Breite bereits durch die Höhe ausgedrückt haben, ist das Volumen von 108 m^3 nur noch von h und t abhängig:

$$108 = 2h^2t \text{ oder nach t aufgelöst } t = 108 / 2h^2 \qquad (*)$$

Nun soll das Material zur Herstellung des Containers minimal werden. Das hängt aber von der Oberfläche des Containers ab und damit ist die Oberflächenfunktion zu minimieren. Wie errechnet sich aber eigentlich die Oberfläche des Containers? Er hat einen Boden, zwei gleiche Seiten vorne und hinten und zwei gleiche Seiten links und rechts. Der Boden B besitzt die Fläche Breite mal Tiefe, also B = bt. Eines der Seitenpaare findet sich über Höhe mal Breite, das andere über Höhe mal Tiefe. Insgesamt ist die gesamte Oberfläche O gegeben durch O(h,b,t) = bt + 2bh + 2th (verbessert!!!) . Nun können wir aber b=2h einsetzen.

Somit ist O(h,t) = 2ht + 4h² + 2th. Aber auch t ist ersetzbar über die obige Gleichung (*)! Es ergibts sich dann

$$O(h) = 2h \cdot \frac{108}{2h^2} + 4h^2 + \frac{108}{2h^2} \cdot 2h = \frac{108}{h} + 4h^2 + \frac{108}{h} \text{ (verbessert!!!)}$$

Sieht schrecklich aus, doch wieder ist es mit dem GTR nicht schwer. Wir müssen das Minimum der Funktion finden. Dabei kann h nicht negativ sein, da es eine Länge darstellt!

Auch hier wird man im GTR wieder etwas am Window herumspielen müssen, bevor man einen Bereich findet, in dem man das Minimum erkennt. Ich hatte noch den Bereich von der Aufgabe zuvor eingestellt. Schon da konnte ich ahnen, dass für einigermaßen kleines x das Minimum erreicht wird. Am Ende habe ich x zwischen 0 und 10 in Einerschritten und y zwischen 0 und 150 in 10er-Schritten eingestellt. Mit <CALC> und <Min> findet man ziemlich exakt X=3. Damit ist für die Höhe 3 Meter zu wählen, denn das X im GTR entspricht unserem h in der Formel für O! Die Breite b ist nach Aufgabenstellung genau doppelt so groß, also 6 Meter. Die Tiefe ist etwas komplizierter aus dem Bruch (*) zu errechnen. Es ergibt sich auch hier 6 Meter als Tiefe. Ohne GTR geht es hier eigentlich gar nicht, man muss sich schon darauf verlassen, dass der Rechner alles richtig rechnet... Am besten macht man noch einmal eine kleine Probe; das Volumen errechnet sich mit unserer Lösung zu 6*6*3 m^3, was ja die geforderten 108 m^3 sind. Mit unserem Wissen von der optimalen Dose und dem optimalen Claim macht das Ergebnis auch irgendwie Sinn; die Grundfläche ist quadratisch und es liegt ein halber offener Würfel vor...

Aufgabe 7:

Im Unterricht haben wir uns das Verhalten von Funktionen für x gegen unendlich angeschaut. Es sei die Funktion f über

$$f(x) = \frac{5x^3 - 4x^2 + 3}{7x^3 - 7}$$

definiert. Welche Werte darf der Nenner nicht annehmen und wieso? Gib den maximalen Definitionsbereich an! Gegen welche Zahl geht der Bruch vermutlich für immer größeres x? Begründe deine Vermutung!

Aufgabe 7 Lösung:

Diese Aufgabe ist vom Rechenaufwand her wieder viel „netter“. Erst einmal zur Frage, welche Zahlen der Nenner nicht sein darf. Natürlich 0, denn durch die Null darf man nicht teilen. Also ist der maximale Definitionsbereich (also die Werte, die ich für x einsetzen kann) fast alle reellen Zahlen (=Kommazahlen). Nur „leicht beschränkt“, denn x=1 führt zum verbotenen Fall, dass der Nenner Null wird! Gegen welche Zahl geht dieser Bruch? Mit dem GTR kann man es sich ansehen, aber auch ohne GTR klappt es mit unserem neuen Merksatz. Für riesige x-Werte ist es dem Zähler ziemlich egal, was nach dem $5x^3$ noch so kommt, denn dieser Summand gewinnt ohnehin. Gleiches gilt im Nenner: die kleine 7 spielt irgendwann gar keine Rolle mehr. Also haben wir oben eigentlich nur $5x^3$ und unten eigentlich nur $7x^3$ zu lesen. Dann heben sich aber x^3 gegen x^3 auf und der Bruch wird gegen 5/7 streben. Der GTR bestätigt das!