Was soll das Bild?

Bevor das Thema „Folgen“ beendet ist, Ihr die Klausur schreibt, Ihr das Abi macht und vielleicht nie wieder mit Mathematik etwas zu tun haben werdet (was wohl selten noch der Fall ist), möchte ich kurz zeigen, wofür Folgen wirklich gut sind. Ohne die Möglichkeit, dieses Bild zu erklären, wäre praktisch keine moderne Technik denkbar. Klingt komisch und ist auch so.
Es war eine der größten Entdeckungen der reinen Mathematik, dass man beliebige und vorher nicht sehr zugängliche Funktionen durch Polynome (also sowas wie: $x, 5x^2 - 3x - 2$ etc.) beliebig genau annähern kann. Schaut Euch das Bild an. Der Sinus ist aufgetragen gegen seinen Winkel, wobei Ihr wissen solltet, dass man für den Winkel das Bogenmaß nimmt. 0 entspricht $0°$, $2\pi \approx 6.28$ entspricht $360°$ und bsp. noch 4π entspricht $720°$, was aber gerade wieder $360°$ entspricht (was wiederum $0°$ entspricht). So wiederholen sich dann auch die Werte und daher nennt man den Sinus ja auch eine periodische Funktion.
Schön definiert habt Ihr den Sinus bisher aber nicht. Er kommt aus einem geometrischen Zusammenhang im rechtwinkligen Dreieck (ob im Einheitskreis oder nicht, ist auch egal). Trotzdem taucht er andauernd auf, ob bei der Beschreibung von Wasserwellen, in der Radiotechnik, bei Ebbe und Flut oder Mondzyklen usw.! Was ist aber die Ableitung vom Sinus!? Angeblich der Cosinus. Passt auch irgendwie, aber woher kommt das? Und in der Physik habt Ihr vielleicht schon einmal gehört: „das ist jetzt ein kleiner Winkel und dann gilt $sin(\alpha) = \alpha$“ und es ging weiter.
Da leider nicht die Zeit ist für eine saubere Einführung des Themas, werde ich hier nur das Endresultat geben. Zurück geht es auf zwei Mathematiker; Herrn MacLaurin und Herrn Taylor. Wiki hilft.
Wir haben nun ja Folgen betrachtet. Entfernen wir uns nochmal von einer reinen Abfolge von Zahlen und gehen zu einer Folge von Funktionen und zwar diesen oben genannten Polynomen. Das hattet ihr sogar schon einmal: Es gab schon mal eine Folge von Sekanten, die als Grenzwert die Tangente in einem Punke einer differenzierbaren Funktion hatte.
Schreiben wir

$$a_1 = x, a_2 = a_1 - \frac{x^3}{3!}, a_3 = a_2 + \frac{x^5}{5!}, a_4 = a_3 - \frac{x^7}{7!}, ...$$

Also addieren bzw. subtrahieren wir abwechselnd in jedem Schritt einen neuen Summanden, der einfach ein Bruch von x mit der nächsten ungeraden Zahl in der Potenz durch eine entsprechende Fakultät ist. Probieren wir es einfach mal aus, dann sieht a_3 bsp. so aus: $a_3 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$. Zeichnen wir das einmal für $x = -5 ... 5$ (Sinus rot, a_3 grün):

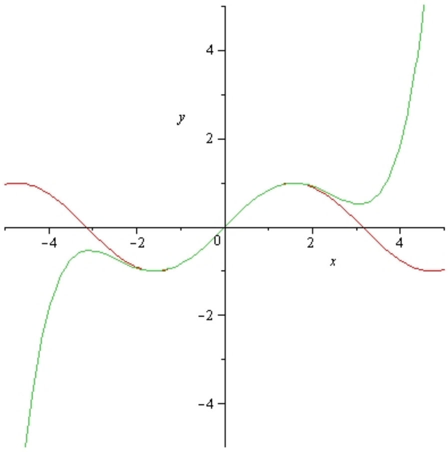

Abbildung 1: Vergleich Sinus mit unserer Folge im dritten Schritt

Das Polynom, das durch a_3 erzeugt wird, stimmt bereits um die 0 sehr mit dem Sinus überein. Das animierte Bild auf der Homepage wird in Einzelschritten von a_1 bis a_6 erzeugt. Bei der letzten Näherung sind beide Funktionen im Bereich von 0 bis 2π nicht mehr zu unterscheiden. Und so haben wir bereits eine praktische Funktion, uns alle Sinuswerte zu berechnen (denn der Sinus wiederholt ja immer die Werte aus diesem Bereich).

Die echte Definition vom Sinus ist wirklich der Grenzwert unserer Folge und es gilt:

$$sin(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp ...$$

Die Punkte deuten wie immer an, das nie abgebrochen wird. Auch der Cosinus wird mit einer solchen Folge definiert. Witzigerweise durchläuft er alle geraden Hochzahlen:

$$cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp ...$$

Auch hier ein Bild mit Cosinus und dem dritten Folgeschritt des Cosinus:

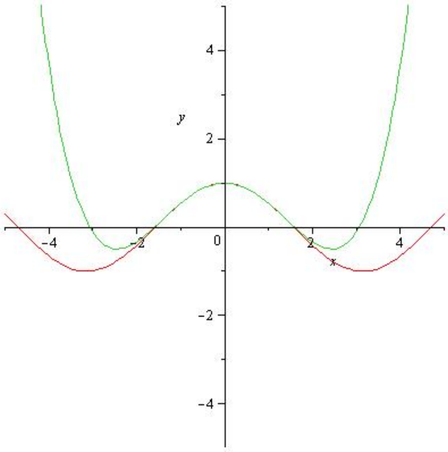

Abbildung 2: Vergleich Cosinus mit der Folge im dritten Schritt

Und jetzt sehen wir auch, warum $sin(x)' = cos(x)$ gilt! Leiten wir nämlich diese unendliche Aneinanderreihung von Termen wie $\frac{x^5}{5!}$ ab, werden alle Exponenten eins kleiner und somit gerade, dafür kürzt sich aus der Fakultät ein Faktor weg; an unserem Beispiel: $(\frac{x^5}{5!})' = \frac{5 \cdot x^4}{5!} = \frac{x^4}{4!}$. Und so verschieben sich alle Indizes nach links und es steht auf einmal die unendliche Summe des Cosinus da. Und umgekehrt genauso! Seltsam ist, *dass* es funktioniert, aber das liegt daran, dass immer neue Summanden „aus dem Unendlichen“ nachrücken.

Das ist nur eine kleine und unvollständige Abhandlung des Themas. Die Essenz ist etwas ganz banales, aber wohl das wichtigste überhaupt im Behandeln komplexer Abläufe: Man kann (nicht immer!) Kompliziertes in seine Einzelbestandteile zerlegen und es genügt dann, einen Teil davon zu betrachten.

Um den Sinus auszurechnen bei gegebenem Winkel, schauen wir, was bsp. unser Polynom a_6 beim entsprechenden Winkel für einen Wert liefert (reicht uns diese Genauigkeit noch nicht, können wir auch a_{10} oder gar a_{100} nehmen, aber das ist praktisch nie nötig. Euer Taschenrechner verwendet wahrscheinlich a_5.

Die Polynome haben zudem den Vorteil, dass sie wirklich einfach abzuleiten sind!

Wem das alles seltsam vorkommt: Auch die Ableitung nähert eine vielleicht komplizierte Kurve in einem Punkt mit einer simplen Geraden, der Tangenten, an.

Und noch eine Bemerkung: Die Wichtigkeit von Polynomen ist durch diesen Text angedeutet. Diese Wichtigkeit ist der Grund, warum Ihr Euch in der Schule damit so ausführlich beschäftigt habt (und noch, weil man an ihnen gut die neuen Begriffe entwickeln kann). Schade eigentlich, dass der Schulstoff nicht vorsieht, die Ernte einzustreichen. Aber das ist nur meine persönliche Meinung :(