Schranken

Der Begriff **beschränkt** ist für Funktionen und Folgen wieder identisch. Da der neue Begriff einer **Schranke** vielleicht Probleme macht, zu Anfang etwas Generelles.
In der Mathematik ist das Abschätzen häufig anzutreffen. Beispielsweise habt ihr in der 7. Klasse (oder?) die Zahl π abgeschätzt: Der Flächeninhalt eines gemalten Kreises wurde mittels Abzählen der kleinen Kästchen eurer Blöcke nach oben und nach unten abgeschätzt. Dieser steht ja über $A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$ in direktem Zusammenhang zu π.
Ihr hattet dann vielleicht diese Ungleichung erhalten: $3.1 \leq \pi \leq 3.2$. Damit ist die ausgemessene Zahl 3.1 eine untere Schranke für π, analog 3.2 eine obere Schranke. Drunter bzw. drüber wird π **nicht** liegen. Es hätte aber auch sein können, dass man grobere Schranken findet. Man könnte sagen: π muss positiv sein, also ist $0 \leq \pi$. Und π ist nicht riesig, also $\pi \leq 1000$. Auch das sind Schranken. Interessant wird es aber erst, wenn man nahe am echten Wert ist und auch das hattet Ihr bereits:

Für das Integral habt ihr Ober- und Untersummen (S_O und S_U) gebildet und gesagt, dazwischen muss die Fläche unter der Kurve (das **Flächenintegral**) liegen: $S_U \leq Integral \leq S_O$. Dann haben sich die beiden Summen immer mehr und mehr aneinander angenähert und ganz anschaulich hattet Ihr den Flächeninhalt dazwischen eingefangen!
(Vorgriff: In diesem Fall war die Untersumme monoton wachsend durch verfeinern der Intervalle, aber sie war auch durch das Flächenintegral beschränkt, also musste sie nach *grenzwert-monoton-beschr.pdf* **konvergieren**. Analoges galt für die Obersumme (nach unten beschränkt und monoton fallend)! Eigentlich sind erst mit den jetzt neu eingeführten Begriffen Eure damaligen Ergebnisse gerechtfertigt.)

Jetzt aber die **Definition von Schranken** (gleich bei Folgen, bitte überlegt euch, wie es für allgemeine Funktionen heißen müsste!):

Wir nennen eine reelle Zahl S_u untere Schranke, genau dann, wenn gilt: $S_u \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir nennen eine reelle Zahl S_o obere Schranke, genau dann, wenn gilt: $a_n \leq S_o$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Folge a_n heißt **nach oben (nach unten) beschränkt**, wenn sie eine obere (untere) Schranke hat.

Eine Folge heißt **beschränkt**, wenn sie sowohl eine obere wie auch eine untere Schranke hat.

Auch diese Begriffe muss man einüben, siehe dazu das neue Arbeitsblatt *arbeitsblatt1.pdf*.

In der Stunde haben wir noch festgestellt, dass es unendlich viele obere (untere) Schranken gibt. Denn hat man mit der Zahl S_o (S_u) eine obere (untere) Schranke gefunden, so ist auch $S_o + 1$ ($S_u - 1$) obere (untere) Schranke.

Trotzdem ist eine dieser unendlich vielen oberen (unteren) Schranken besonders ausgezeichnet:

Es sind die **kleinste obere und die größte untere Schranke**. Man findet jeweils keine obere (untere) Schranke, die näher an der Folge liegen kann. Man mache sich das klar!