

Grenzwert monoton fallender bzw. monoton wachsender und beschränkter Folgen

Es gibt hier den wichtigen Satz festzuhalten:

Ist eine Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt, so konvergiert sie gegen die kleinste obere Schranke.

Analog für monoton fallende Folgen:

Ist eine Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert sie gegen die größte untere Schranke.

So kurz kann man es halten. Dieser Satz muss eigentlich noch bewiesen werden, aber an dieser Stelle sei darauf verzichtet.

Lieber soll man sich klar machen, dass schon ein Grenzwert existiert, wenn man weiß, dass eine Folge monoton fällt, von mir aus mit einem Startwert von 1000, sie aber durch -1000 nach unten beschränkt ist. Wir starten ja dann mit 1000 und jeden Schritt wird die Zahl etwas kleiner. Da wir dies aber unendlich oft machen, wird die 1000 kleiner und kleiner. Entweder erreicht sie irgendwann die -1000 (darunter darf die Folge nicht fallen, sonst wäre -1000 keine untere Schranke gewesen) oder die Folgeglieder **stauen** sich irgendwo davor.

Die Folge $a_n = 1/n$ ist nach unten beschränkt durch -1000 und (sogar streng!) monoton fallend (es soll ja gelten: $a_{n+1} < a_n$ und das ist erfüllt für $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$). Sie muss nach dem Satz konvergieren. Hier stauen sich die Folgeglieder vor der Null, denn negativ kann die Folge auch nicht werden. Null ist die größte untere Schranke und wie in der Stunde festgehalten damit der Grenzwert.

Wichtig ist, dass der Satz nur für monotone Folgen gilt! Ein einfaches Gegenbeispiel war die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$.

Die allgemeine Definition des Grenzwertes folgt noch, denn auch für alternierende Folgen kann es einen Grenzwert geben. Die auf dem Arbeitsblatt bearbeitete Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert auch gegen 0...