Lösungen zum Arbeitsblatt

Aufgabe 1 - Definition, Darstellung von Folgen

(a) Was ist eine Folge?
Eine Folge ist eine Funktion mit dem Definitionsbereich der natürlichen Zahlen ab der 1. Das Bild der Folge (sprich die a_n) können natürlich auch reell sein.
Kurznotation: $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
(b) Welche Darstellungen von Folgen kennst Du?
Explizite und rekursive Darstellung.

Zusatz, schwer: (c) Wieviele Informationen braucht man, um eine Folge eindeutig festzulegen?
Entweder braucht man den gesamten expliziten Term, sprich die Funktion, oder einen Startwert und eine Rechenvorschrift zum Berechnen des Nachfolgers. Merke: Der Nachfolger kann prinzipiell von allen Vorgängern abhängen, meistens hängt er aber nur vom direkten Vorgänger ab.

Aufgabe 1.5 - Darstellung von Folgen

Schreibe die Folgen in beiden Formen, also implizit wie explizit, auf und gib die ersten drei Folgeglieder an. Bringe die geometrischen und arithmetrischen Folgen auf Normalform (mit d bzw. q und a_1).

(a) $a_{n+1} = n \cdot a_n, \quad a_1 = 1$

(b) $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n, \quad a_1 = 1$

(c) $a_n = 5 \cdot n$

(d) $1, 4, 16, 64, ...$

(e) $3, 6, 9, 12, ...$

Zusatz, schwer: (f) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$

(a) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$, die rekursive (=implizite) Form steht schon da, explizit gilt $a_n = (n-1)!$. Dies kann man sich überlegen, indem man feststellt, dass jeden Schritt ein Faktor zum Vorgänger dazukommt, der aber nicht konstant ist, sondern eben $(n-1)$.
(b) Gleiche Idee wie in (a), nur dass hier gleich ein Faktor n dazu kommt. Also $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6$, rekursiv steht da, explizite Form: $a_n = n!$. *Zusatz: Was ist $n!$? Siehe dazu den Text fakultaet.pdf.*
(c) $a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 15$. Explizite Form steht da, implizit ergibt sich wegen konstanter Addition der 5: $a_{n+1} = a_n + 5, a_1 = 5$. Die geforderte Normalform dieser arithmetischen Folge ist: $a_{n+1} = a_1 + (n-1) \cdot n = 5 + (n-1) \cdot 5$.
(d) Die ersten Folgeglieder stehen da. Rekursive Form: $a_{n+1} = a_n \cdot 4, a_1 = 1$. Normalform dieser geometrischen Folge: $a_{n+1} = a_1 \cdot a_n \cdot 4 = 1 \cdot a_n \cdot 4$. Explizit findet man $a_n = 4^{n-1}$.
(e) Diese Folge ergibt sich wie in (d), nur dass hier in jedem Schritt addiert wird und zwar die 3. Also $a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 3$. Startwert und Differenz sind damit gefunden und so auch gleich die Normalform $a_{n+1} = 3 + (n-1) \cdot 3$. Explizit gilt $a_n = 3 \cdot n$, was schwer an (c) erinnert!
(f) Diese Folge ist die Fibonacci-Folge $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$, die am Ende des Themenblocks „Folgen und Induktion“ in einer GFS ausführlich behandelt werden wird. Die explizite Form ist schwer zu finden. Wen es mehr interessiert, Wikipedia hat zu ihr einen schönen Artikel. Wichtig ist hier, dass Ihr seht, dass die Rekursion nicht nur vom direkten Vorgänger alleine abhängen muss!
Zusatz: Die Eingabe in den Taschenrechner ist leider unflexibel und immer von der Form ***u(n)=****.... Fibonacci würde man bsp. so eingeben:* ***u(n)=***$u(n-1) + u(n-2)$ *und für den Startwert muss man dann* ***u(nmin)=***$\{1, 1\}$ *angeben. Beachte die geschweiften Klammern! Der GTR liest so die ersten beiden Folgeglieder ein und bastelt mit der Rekursion die Wertetafel bzw. das Schaubild.*

Aufgabe 1,75 - Monotonie

Prüfe, welche Folgen monotones Verhalten zeigen!

(a) $a_{n+1} = a_n, \; a_1 = 4$

(b) $a_n = \frac{1}{n^2}$

(c) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = a_1 = 1$

(d) $a_n = 5 \cdot n + 1$

(e) $a_n = (-1)^n \cdot 0.5^n$

(f) $a_n = 3$

(g) $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n, \quad a_1 = 1$

(a) Eine konstante Folge, daher sowohl monoton fallend wie auch wachsend, da immer $a_{n+1} = a_n$ gilt. Strenge Monotonie ist so natürlich ausgeschlossen!
(b) Da wir schon etwas über den Grenzwert wissen: Dies ist eine sogenannte Nullfolge, da der Grenzwert 0 beträgt. Die Folge ist streng monoton fallend, da gilt: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-(n+1)^2}{(n+1)^2 n^2} = \frac{-2n-1}{(n+1)^2 n^2}$ und der Zähler immer kleiner Null ist, während der Nenner positiv bleibt.
(c) $a_{n+1} - a_n = (a_n + a_{n-1}) - a_n = a_{n-1}$. Da nun alle Folgeglieder positiv sind (weil ja nur addiert wird und die Startwert positiv waren), gilt immer $a_{n-1} > 0$. Also ist diese Folge sogar streng monoton wachsend.
(d) Diese Folge sieht aus wie eine Gerade und ist daher natürlich streng monoton wachsend. In Normalform sieht diese arithmetische Reihe so aus:
$a_{n+1} = 6 + (n-1) \cdot 5$. War aber nicht gefragt.
(e) Der alternierende Faktor $(-1)^n$ zerstört jegliche Monotonie.
(f) Diese Folge ist wie (a) eine konstante Folge und somit sowohl monoton wachsend wie fallend.
(g) Dies ist die Folge aus Aufgabe 1.5 (b) und es gilt ja
$a_{n+1} - a_n = ((n+1) \cdot a_n) - a_n = n \cdot a_n$. Dies ist aber immer positiv, denn die a_n sind es alle auch! Damit ist die Folge streng monoton wachsend. Übrigens wäre 1.5 (a) nicht streng monoton, sondern nur monoton wachsend, weil eben $a_1 = a_2 = 1$ gilt und immer ein Gegenbeispiel die Monotonie zerstört.

Aufgabe 1.875 - Schranken

Finde für die Folgen obere bzw. untere Schranken. Gibt es einen Grenzwert? Findest du eine kleinste obere bzw. größte untere Schranke?

(a) $a_{n+1} = a_n,\ a_1 = 4$

(b) $a_n = \frac{1}{n^2}$

(c) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = a_1 = 1$

(d) $a_n = 5 \cdot n + 1$

(e) $a_n = (-1)^n \cdot 0.5^n$

(f) $a_n = 3$

(g) $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n, \quad a_1 = 1$

Die Folgen sind genau die der vorherigen Aufgabe. Wir benennen eine obere Schranke mit S_o und entsprechend eine untere Schranke mit S_u. Den Grenzwert bezeichnen wir mit g. Denkt daran, gibt es eine Schranke, gibt es unendlich viele. Daher sind meine Werte nur Beispiele!
(a) $S_o = 3.5, S_u = 4.5, g = 4$.
(b) $S_o = 2, S_u = -1, g = 0$.
(c) $S_o = fehlt, S_u = 0, g = fehlt$. *Zusatz: Eine solche Folge, die (nach Aufgabe 1.75) immer weiter wächst und keine obere Schranke hat, nennt man auch bestimmt divergent gegen Unendlich.*
(d) $S_o = fehlt, S_u = 1, g = fehlt$.
(e) $S_o = 1, S_u = -2, g = 0$. *Zusatz: Dies ist wie besprochen eine alternierende Folge und daher erwartet man vielleicht, dass gerade kein Grenzwert existiert. Schaut man sich aber die Folge der Beträge an, dann sieht man, dass dies eine Nullfolge ist und so ist das Vorzeichen irgendwann auch egal:* $|a_n| = 0.5^n = (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$.
(f) $S_o = 4, S_u = 2, g = 3$.
(g) $S_o = fehlt, S_u = 0, g = fehlt$. *Zusatz: Diese Rekursion definiert die Fakultät und die wächst extrem schnell über jede Schranke hinaus. Übrigens sogar schneller als eine Potenzfunktion, siehe dazu den Text fakultaet.pdf.*

Aufgabe 1.9375 - Zusatz: Reihen

Bis zu welcher Aufgabe könnte dieser Zettel gehen? Erst einmal wächst die Folge der Nummerierung der Aufgaben offensichtlich monoton. Wäre sie auch beschränkt, gäbe es sofort nach unserem Satz einen Grenzwert!
Schreiben wir einmal die bisherigen Zahlen auf:
$a_1 = 1, a_2 = 1.5, a_3 = 1.75, a_4 = 1.875, a_5 = 1.9375$. Was sagt uns das? Eigentlich nix. Zumindest ich wäre mir erst einmal nicht sicher, ob die Folge beschränkt ist, oder halt nicht. Was kann man noch machen!? Schauen wir uns die Zuwächse an.
$a_2 - a_1 = 0.5, a_3 - a_2 = 0.25, a_4 - a_3 = 0.125a_5 - a_4 = 0.0625$. Das ist ja schon aufschlussreicher, oder? In Brüchen die Zuwächse: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ und allgemein wohl $\frac{1}{2^n}$. Machen wir uns dass auf dem Zahlenstrahl anschaulich:

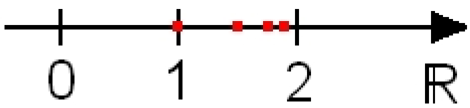

Abbildung 1: Annäherung der Folge an die 2

Wir starten gedanklich bei der 0 und haben die gesamte Strecke bis zur 2 vor uns. Jetzt ein Riesenschritt zur 1 und sofort ist die verbleibende Strecke nur noch halb so groß wie zuvor. Leider schaffen wir nicht noch so einen großen Schritt, sonst wären wir mit a_2 schon am Ziel. Dafür schaffen wir es wieder, den restlichen Weg zu halbieren. Doch auch diesen Schritt können wir nicht wiederholen, sondern nur wieder den restlichen Weg halbieren. Und so weiter. Immer bleibt noch etwas vom restlichen Weg übrig, auch wenn dieses Etwas gegen Null strebt. Und so ist die 2 die (kleinste!) obere Schranke und wegen der Monotonie ist der Grenzwert gesichert. Also könnte der Zettel beliebig viele Aufgaben enthalten ohne die 2 zu benötigen...