# Simulation von radionaktivem Zerfall mit Würfeln

**Beschreibung**:

- 40 Würfel werden gemeinsam geworfen.
- Alle Würfel, die die Zahl 6 zeigen, werden entfernt.
- Die restlichen Würfel verbleiben im Bestand und werden erneut geworfen.
- Dies wird so lange wiederholt, bis alle Würfel entfernt wurden. In jedem Schritt wird der Bestand notiert und anschließende eine Messkurve angefertig.

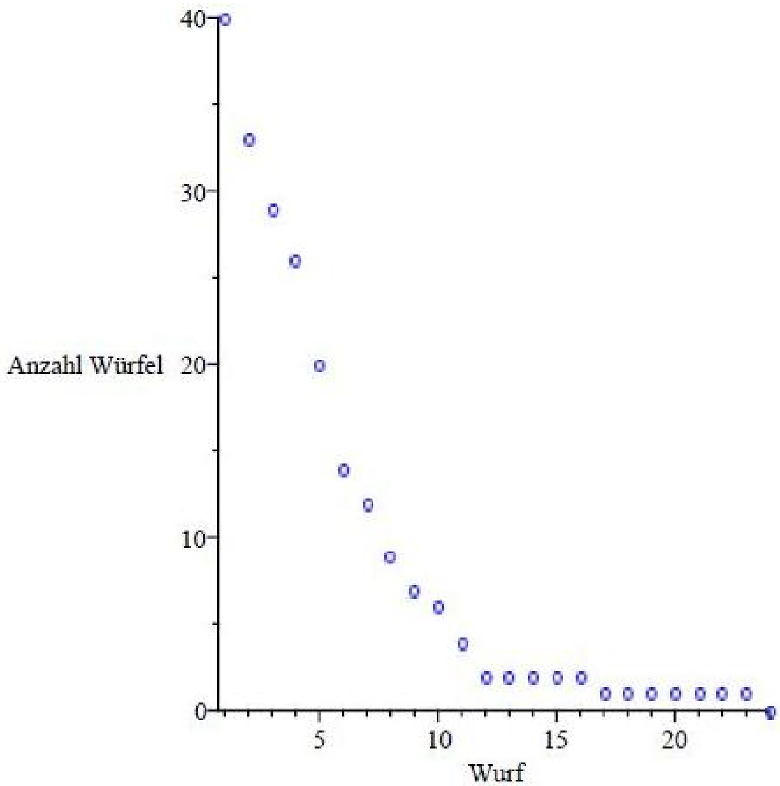
**Analogie**:

- Jedem Wurf entspricht ein Zeitschritt.
- Die Gesamtwürfelzahl entspricht der Anzahl der am Anfang vorhandenen Kerne des radioaktiven Stoffes.
- Die momentane Anzahl der Würfel entspricht der Anzahl der noch vorhandenen radioaktiven Kerne.
- Die geworfenen Sechser sind zerfallene Kerne entsprechen Kernen des umgewandelten Stoff. Wir gehen vereinfachend davon aus, dass diese Kerne nicht radioaktiv sind. In der Natur ist das oft nicht so.

**Testversuch**:

| Wurf-Nr. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11-15 | 16-22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl Würfel | 40 | 33 | 29 | 26 | 20 | 14 | 12 | 9 | 7 | 6 | 4 | 2 | 1 | 0 |

**Schaubild** (Achtung: nur punktweise, nicht verbinden!):



**Auswertung**:

Wir sehen im Schaubild, dass die Abnahme der Würfelanzahl anfangs groß ist und dass sie später klein ist:

*„Ist viel da, geht viel weg; ist wenig da, geht wenig weg."*

Es gibt einen Zusammenhang zwischen der Änderung der Würfelzahl und dem momentanen Würfel-Bestand zu geben. ***Mal sehen, ob das nachher im Demonstrationsversuch mit Cäsium auch so ist!*** Überlegen wir uns das mathematisch:

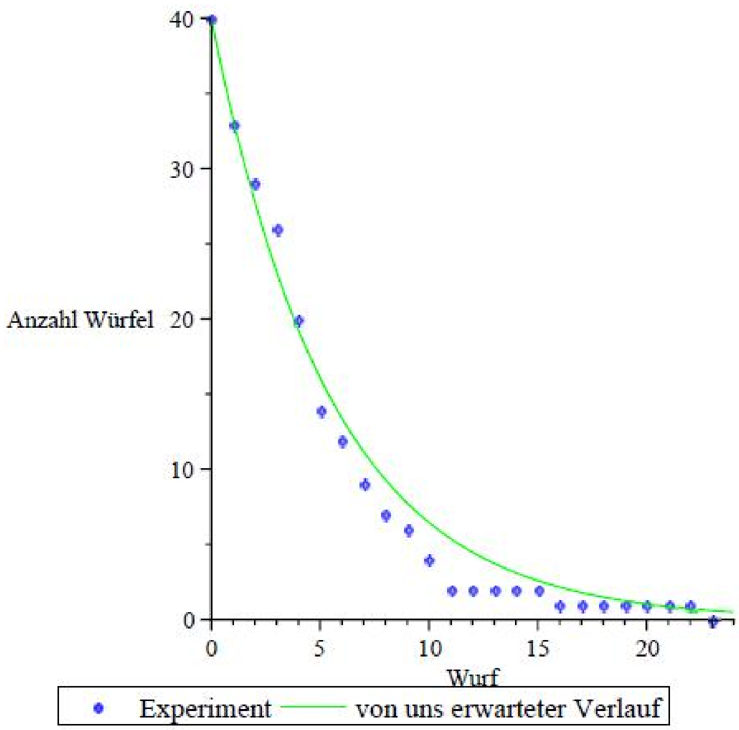
In nur einem von sechs Fällen nehmen wir den jeweiligen Würfel weg. So erwarten wir für unsere 40 Würfel nach dem ersten Wurf:

$$\mathrm{Anzahl(1.Wurf)} = 40 - \frac{1}{6} \cdot 40 = \frac{5}{6} \cdot 40$$

Einen Zeitschritt später haben wir von unserem momentanen Würfel-Bestand (zu Anfang 40) nur noch $\frac{5}{6}$ der Würfel zu erwarten. So erwarten wir $\frac{5}{6} \cdot 40 \approx 33$ Würfel nach dem 1. Wurf, dann $\frac{5}{6} \cdot (\frac{5}{6} \cdot 40) \approx 28$ usw. Nach dem n. Wurf sollten wir dann unsere 40 Würfel n-mal um 1/6 reduziert haben, also gilt allgemein:

$$\mathrm{Anzahl(n.Wurf)} = 40 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\mathrm{n}}$$

Dieser erwartete Verlauf ist in der folgenden Abbildung zusätzlich zu den Messwerten eingezeichnet. Diesmal als durchgezogene Linie, um besser vergleichen zu können.




Man sieht, dass von diesem „idealen" Verlauf die tatsächlich geworfenen Ergebnisse etwas abweichen.

Da man bei einem echten radioaktiven Zerfall die Zerfallswahrscheinlichkeit (anders als bei unseren beschrifteten Würfeln) selten kennt, führt man eine neue, aber trotzdem verlässliche Größe ein, die sogenannte

$$\text{Halbwertszeit } T_{1/2}$$

Diese Zeit (bei uns der entsprechende Wurf) ist die Zeit (der Wurf), bei der gerade noch die Hälfte der Ausgangsmenge vorhanden ist. In unserem Experiment bestimmt sich daher die Halbwertszeit zu 4 Würfen, denn zu Anfang sind 40 Würfel vorhanden und zum 4. Wurf sind genau 20 Würfel übrig.

**Es ist eine wichtige Eigenschaft von solchen Zerfallsprozessen, dass in gleichen Zeitabständen eine gleiche relative Abnahme stattfindet *(Grund: es handelt sich um exponentielles Verhalten)*.**

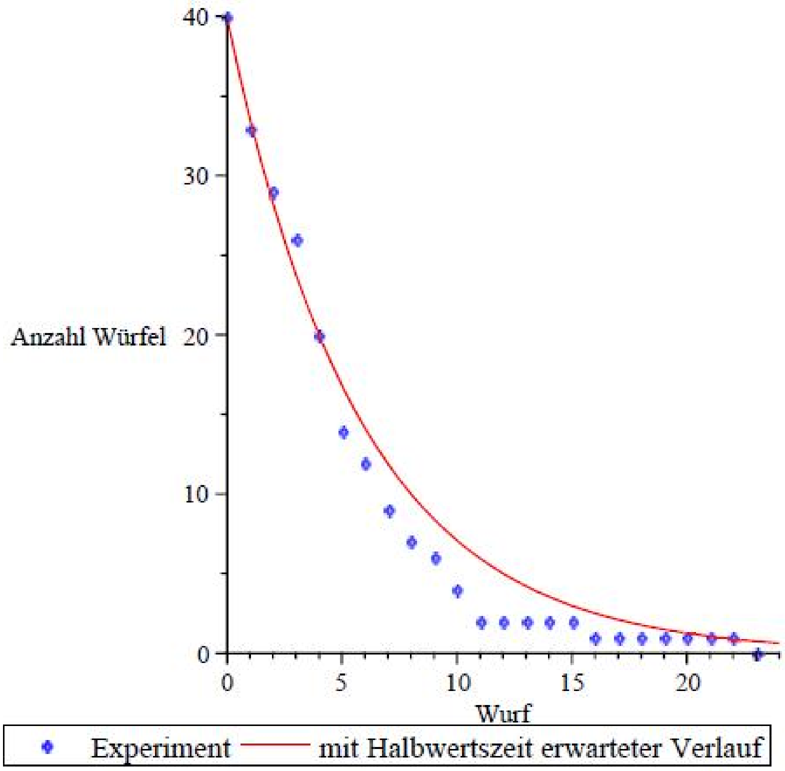
Man kann dann die Anzahl der Würfel mit dieser Formel beschreiben (für die Variable t denkt man sich den jeweiligen Wurf):

$$\text{Anzahl}(t) = \text{Startwert} \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

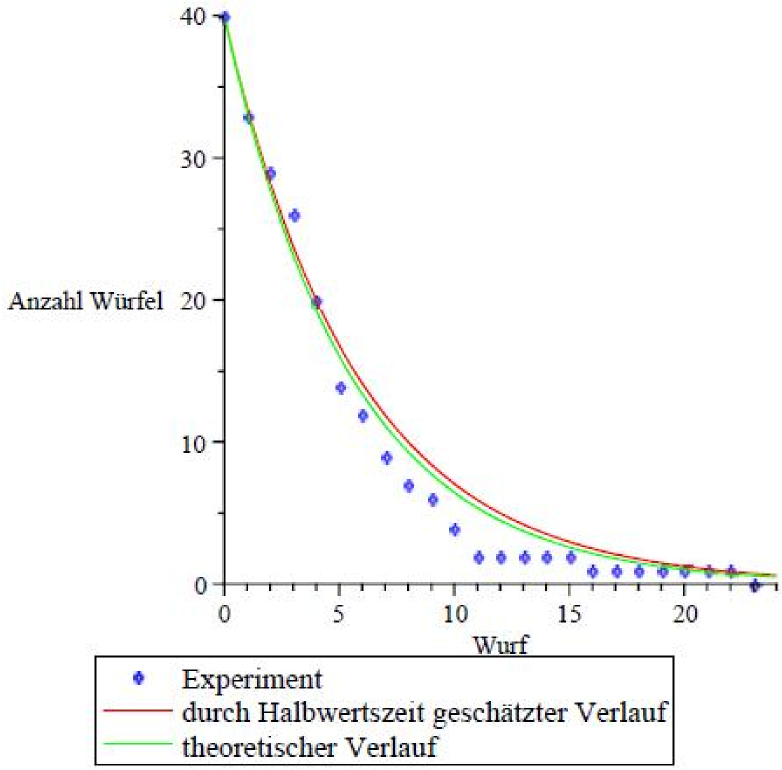
Bei uns wäre das bei geschätzter Halbwertszeit (sozusagen der „Halbwertswurf“) $T_{1/2} = 4$:

$$\text{Anzahl}(t) = 40 \cdot 2^{-\frac{t}{4}}$$

Zeichnen wir diese Funktion noch einmal zu unseren Messwerten ein:



Der theoretische Verlauf und der über die „gemessene“ Halbwertszeit dargestellte Verlauf unterscheiden sich etwas:




Zusammengefasst haben wir also zwei unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten eines Zerfalls. Entweder über die Halbwertszeit, die man experimentell bestimmt oder über die Zerfallswahrscheinlichkeit. Da man bei natürlichen Zerfällen die echte Wahrscheinlichkeit eigentlich nie kennt, muss man messen und dann bietet es sich an, die Halbwertszeit zu bestimmen!

$$\boxed{\mathrm{B(t)} = \mathrm{B(0)} \cdot 2^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}_{1/2}}}}$$

bzw.

$$\boxed{\mathrm{B(t)} = \mathrm{B(0)} \cdot a^{\mathrm{t}}}$$

wobei B(0) der anfängliche und B(t) der zur Zeit t vorhandene Bestand ist. a ist eine Konstante, die für Zerfälle kleiner 1 ist, bei uns galt bsp. $\mathrm{a} = \frac{5}{6}$.
*(Erinnerung: für ein exponentielles Wachstum wäre die Konstante a größer 1.)*