Analysis

ZAHLENFOLGEN

Teil 4 : Monotonie

Datei Nr. 40051

Friedrich Buckel

Juli 2005

Internetbibliothek für Schulmathematik

Inhalt

1 Einführungsbeispiele

VORWORT

Eine wichtige Eigenschaft von Folgen (und Funktionen ganz allgemein) ist die Monotonie. Dabei geht es darum, dass eine monotone Folge ab einer entweder ganz oder in einem bestimmten Abschnitt (also etwa ab n = 5) immer zunehmende Werte hat, Dann also ist $a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < \ldots$.
Neben der Eigenschaft „monoton steigend" zu sein, kann eine Folge auch monoton fallen, dann ist z.B. $a_5 > a_6 > a_7 > a_8 > \ldots$.

Um diese Eigenschaft an einer durch einen Term gegebene Folge feststellen zu können, genügt es nicht, einige Folgenglieder zu berechnen. Ein Stück „weiter hinten" in der Folge könnte sich das Verhalten ja ändern. Wir müssen also einen Beweis durchführen, der eine allgemeine Aussage macht. Sehen wir uns das an Beispielen an.

Beispiel 1: $a_n = 4n - 4$

Diese Zahlenfolge hat die Werte $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$, ...
An der Form des Terms sollte man erkennen. dass es sich um eine arithmetische Folge handelt, bei der das nächste Glied um jeweils 4 größer ist als der Vorgänger.
Dies garantiert die Zunahme der Folgenglieder.

Man sagt, dass diese Folge **streng monoton steigt** (wächst). Und als Kennzeichen kann man diese Ungleichung verwenden: $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Das Wort streng bedeutet, dass auch nicht zwischendurch mal zwei Glieder gleich groß sind !

Beispiel 2: $a_n = 40 - 2n$

Auch hier liegt eine arithmetische Folge vor, und der Nachfolger ist stets um 2 kleiner als der Vorgänger. Jetzt wollen wir dies richtig beweisen, indem wir so rechnen, wie man es bei den arithmetischen Folgen gelernt haben sollte: Wir berechnen die Differenz aufeinanderfolgender Glieder:

$$a_{n+1} - a_n = (40 - 2(n+1)) - (40 - 2n) = 40 - 2n - 2 - 40 + 2n = -2$$

Weil $a_{n+1} - a_n = -2$ ist, gilt $a_{n+1} = a_n - 2$ d.h. es ist $a_{n+1} < a_n$.
Wir sagen, die Folge **fällt streng monoton**.

Erkenntnis:

Wenn uns eine Rechnung dieses Ergebnis liefert: $\mathbf{a_{n+1} - a_n > 0}$, dann besagt dies doch ebenso $\mathbf{a_{n+1} > a_n}$, und dies sagt aus, dass a_{n+1} (also der Nachfolger von a_n) größer als a_n ist. Dann steigt die betreffende Folge streng monoton.

Liefert eine Rechnung dagegen $\mathbf{a_{n+1} - a_n < 0}$, dann folgt $\mathbf{a_{n+1} < a_n}$, was und sagt, dass der Nachfolger kleiner als der Vorgänger ist, dass die Folge streng monoton fällt.

Monotonie bei arithmetischen Folgen

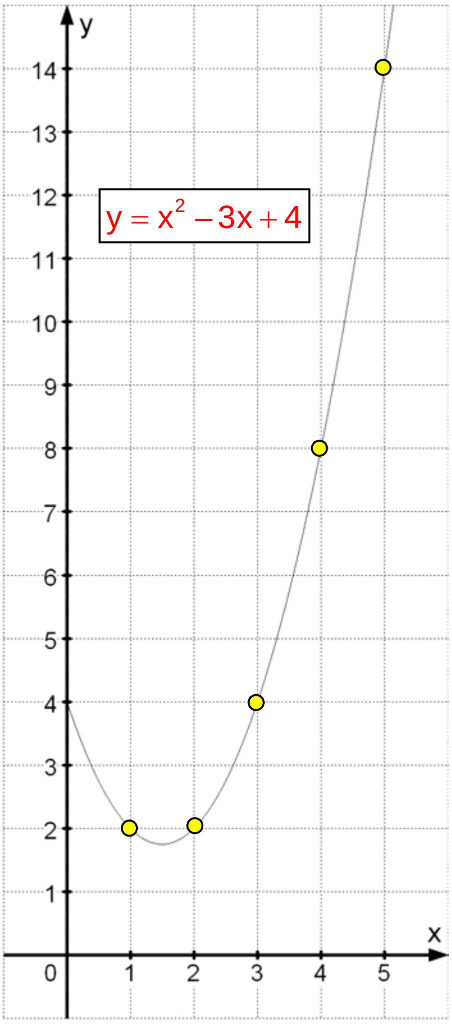
Wir sehen an den beiden Beispielen: Ist $d = a_{n+1} - a_n > 0$, liegt eine streng wachsende arithmetische Folge vor, etwa $a_n = 12 \cdot n - 26$ (d=12), $a_n = \frac{1}{2}n + 5$ $(d = \frac{1}{2})$, usw.

Ist dagegen $d = a_{n+1} - a_n < 0$, etwa bei $a_n = -3n + 15$ (d = -3) oder $a_n = 20 - 30n$ (d = -30), dann fällt diese Folge.

Die arithmetischen Folgen sind leicht zu berechnen, weil sie lineare Funktionsterme haben, also Terme dieser Bauart: $a_n = r \cdot n + s$!

Alle anderen Terme bereiten teilweise erhebliche Probleme beim Nachweis der Monotonie.

Beispiel 3: $a_n = n^2 - 3n + 4$



Wir berechnen:

$a_1 = 1 - 3 + 4 = 2$
$a_2 = 4 - 6 + 4 = 2$
$a_3 = 9 - 9 + 4 = 4$
$a_4 = 16 - 12 + 4 = 8$
$a_5 = 25 - 15 + 4 = 14$
usw.

Das Betrachten der 5 Werte führt zu folgender Vermutung: $a_1 = a_2$, aber ab a_2 nimmt die Folge ständig zu. Dies ist schnell bewiesen, wenn man sich klar macht, dass die zu den einzelnen Gliedern der Folge gehörenden Punkte auf der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 3x + 4$ liegen. Diese hat ihren Scheitel bei $x_S = \frac{3}{2}$ und weil sie nach oben geöffnet ist, nehmen die Werte rechts vom Scheitel ständig zu.

Worauf es uns zunächst ankommt, ist, dass nun nicht mehr $a_{n+1} > a_n$ gilt, aber noch immer $a_{n+1} \geq a_n$.

Jetzt spricht man nicht mehr von der <u>strengen</u> Monotonie, sondern wir sagen: a_n <u>wächst monoton</u>.

Der Nachweis der Monotonie geschah hier über die Beschreibung der Lage der Punkte auf einer Parabel.

Wir können daher nun folgende Definitionen festhalten:

2 Definitionen

Eine Folge heißt **streng monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} < a_n$$

Eine Folge heißt **monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} \le a_n$$

Eine Folge heißt **streng monoton wachsend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} > a_n$$

Eine Folge heißt **monoton wachsend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} \ge a_n$$

Man merkt sich: Fehlt das Wort „streng“ , dann dürfen aufeinander folgende Glieder der Folge auch gleich groß sein.

Schüler sollten diese Definitionen lernen und auswendig wissen, sonst kann man entsprechende Aufgaben nicht lösen !

3 Welche Beweistechnik ist besser ?

Die in der Definition genannten Ungleichungen sind nicht sehr günstig zum Anwenden in Beweisaufgaben. Dies schauen wir uns an Hand dieser Folge an:

Beispiel 4: $$a_n = \frac{2n+16}{n+5}.$$

Die Aufgabe heißt: Zeige, dass diese Folge streng monoton fällt.

Ich zeige nun zuerst, wie die meisten Schüler vorgehen und dabei nicht bemerken, dass sie ein Problem einfach ignorieren:

Zu zeigen ist: $$a_{n+1} < a_n. \qquad (1)$$

Zuerst berechnen wir $$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+16}{(n+1)+5} = \frac{2n+18}{n+6}$$

Achtung: a_{n+1} entsteht aus a_n , indem wir n durch n+1 ersetzen !

Die Behauptung (1) läßt sich dann schreiben als

$$\frac{2n+18}{n+6} < \frac{2n+16}{n+5} \qquad (2)$$

Nun wird diese Ungleichung mit $(n+6)(n+5)$ multipliziert damit die Nenner verschwinden. Weil dieses Produkt stets positiv ist, bleibt dabei die Richtung der Ungleichung erhalten. Es folgt also

$$(2n+18)(n+5) < (2n+16)(n+6) \qquad (3)$$
$$2n^2+18n+10n+90 < 2n^2+16n+12n+96 \qquad (4)$$
$$28n+90 < 28n+96 \qquad (5)$$
$$90 < 96 \qquad (6)$$

und das „stimmt“ !

Die typische Schülerargumentation ist nun die folgende:
Weil (6) eine wahre Aussage ist, gilt auch (2) d.h. (1) d.h. a_n fällt streng monoton.
Dies ist so jedoch unzulässig. Rein logisch gesehen passiert nämlich folgendes:

Es wird eine Folgerungskette gebildet:

Aus (1) folgt (2) folgt (3) folgt (4) folgt (5) folgt (6).

Beispiel: Wenn es regnet, dann folgt: Die Straße ist naß. Wir schauen also zum Fenster hinaus und entdecken, dass die Straße naß ist. Folgern wir daraus, dass es regnet ? Man merkt, dies kann der Fall sein, es kann aber auch schon aufgehört haben zu regnen! Der Schluß ist also nicht zwingend umkehrbar !

Genauso wenig dürfen wir nach Ansehen der wahren Aussage (6) sagen, aha, also regnet es, d.h. es gilt die Ungleichung (1).

Eine Folgerung darf nicht einfach umgekehrt werden.

Was ist also zu tun: Ganz „einfach“ wir müssen die ganze Kette umkehren und jeden Schritt einzeln nochmals überprüfen:

Folgt aus (6) die Ungleichung (5) und daraus (4), (3), (2) und schließlich (1) ???

Erst wenn dies alles der Fall ist, dürfen wir sagen, dass die Folge streng monoton fällt.

Schüler wissen nun auch nicht immer, welche Schritte in der Folge von (1) nach (6) umkehrbar sind, und welche nicht. Daher ist diese Art des Beweisens ungünstig !

Es gibt einen Weg, der zudem deutlich kürzer sein kann, und der keine solchen logischen Probleme aufwirft:

Hier die neue Methode:

Wir beweisen nicht die Ungleichung $a_{n+1} < a_n$

sondern die Ungleichung $a_{n+1} - a_n < 0$!

Warum dies viel einfacher ist, zeigt diese Beispielrechnung:

Zu beweisen ist $a_{n+1} - a_n < 0$ d. h. $\frac{2n+18}{n+6} - \frac{2n+16}{n+5} < 0$.

Und das machen wir so, dass wir die linke Seite anschreiben und so lange umformen, bis wir erkennen, dass das Ergebnis negativ ist !

Neue MUSTERLÖSUNG:

Linke Seite:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+18}{n+6} - \frac{2n+16}{n+5} = \frac{(2n+18)(n+5) - (2n+16)(n+6)}{(n+6)(n+5)}$$

$$= \frac{2n^2 + 18n + 10n + 90 - \left(2n^2 + 16n + 12n + 96\right)}{(n+6)(n+5)}$$

$$= \frac{-6}{(n+6)(n+5)}$$

ARGUMENTATION:

Weil n eine positive Zahl ist, wird der Nenner positiv. Der Zähler ist negativ, also ist der Bruch stets negativ, was zu beweisen war.

Es lohnt sich dabei nicht, den Nenner auszumultiplizieren !!

4 Wichtige Musterbeispiele

auf der Mathe-CD