Es wird überwiegend mit Beispielen gearbeitet.

Folgen

Geometrische Folgen:

Explizite Darstellung: $a_n = 3 \cdot 4^n$.
Implizite Darstellung: $a_{n+1} = a_n \cdot 4,\ a_0 = 3$.

Ineinander umformen kann man, indem man in der impliziten a_n durch a_{n-1} usw. ersetzt. Man stellt dann fest, dass man nach n Ersetzungsschritten fertig ist und n Faktoren der Zahl 4 produziert hat. Übrig bleibt das $a_0 = 3$ und man hat genau die explizite Form.

Andersherum ist es eigentlich nie nötig, aber wenn es gefragt wird:
Man schreibt $a_{n+1} = 3 \cdot 4^{n+1}$ und $a_n = 3 \cdot 4^n$ aus und setzt den n-ten Schritt in die (n+1)-Formel ein. Denn diese ist ja dieselbe wie die n-te, nur dass ein Faktor 4 mehr dasteht. Dann setzt man noch $n = 0$ und findet direkt $a_0 = 3$.

Arithemtische Folgen:

Explizite Darstellung: $a_n = 3 \cdot n + 4$.
Implizite Darstellung: $a_{n+1} = a_n + 3,\ a_0 = 4$.

Ineinander umformen kann man, indem man in der impliziten a_n durch a_{n-1} usw. ersetzt. Man stellt dann fest, dass man nach n Ersetzungsschritten fertig ist und n Summanden der Zahl 3 produziert hat. Übrig bleibt das $a_0 = 4$ und man hat genau die explizite Form.

Andersherum ist es eigentlich nie nötig, aber wenn es gefragt wird:
Man schreibt $a_{n+1} = 3 \cdot (n+1) + 4$ und $a_n = 3 \cdot n + 4$ aus und setzt den n-ten Schritt in die (n+1)-Formel ein. Denn diese ist ja dieselbe wie die n-te, nur dass ein Summand 3 mehr dasteht. Dann setzt man noch $n = 0$ und findet direkt $a_0 = 4$.

Merke: Arithmetische Folgen sind wie Geraden, die Ihr schon kennt. Es kommt immer etwas konstantes dazu.

Geometrische Folgen sind wie Potenzfunktionen, die Ihr hoffentlich schon kennt. Es kommt je Schritt ein Faktor dazu.

Schranken:

Für eine obere (untere) Schranke gilt: alle Folgeglieder liegen drunter (drüber). Soll man eine solche finden, setzt man an (hier suchen wir eine untere Schranke S_u für die Folge $a_n = 5 + 1/n$):

$$a_n \geq S_u \Leftrightarrow 5 + \frac{1}{n} \geq S_u \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq S_u - 5 \Leftrightarrow 1 \geq n(S_u - 5).$$

Für welche Zahlen S_u ist das erfüllt? Es muss ja für alle n gelten, auch für die ganz großen. Dann muss aber auf der rechten Seite der Faktor $(S_u - 5)$ entweder negativ oder null sein. Also sind alle Zahlen S_u o.k., für die gilt $S_u \leq 5$. Dann haben wir mit einem Mal unendlich viele Schranken gefunden. Und wir sehen sogar die größte dieser; es ist $S_u = 5$, was übrigens auch immer der Grenzwert ist, falls die Folge konvergiert!

Grenzwert $a := \lim_{(n\to\infty)}(a_n)$:

Ist eine Folge gegeben, bsp. $a_n = (2n^2+4)/(n^2-7)$ und wir „vermuten" $a = 2$, so setzt man an:

$$|a_n - a| \leq \epsilon \Leftrightarrow |\frac{2n^2+4}{n^2-7} - 2| \leq \epsilon$$

Formt man den Betrag etwas um, erkennt man, dass diese Ungleichung für alle $\epsilon > 0$ erfüllbar ist:

$$|\frac{2n^2+4}{n^2-7} - 2| = |\frac{2n^2+4-2\cdot(n^2-7)}{n^2-7}| = |\frac{2n^2+4-2n^2+14}{n^2-7}| = |\frac{18}{n^2-7}|$$

Nun hat man alles getan; erstens ist dieser Bruch für genügend große n positiv, d.h., wir können die Betragsstriche vergessen. Zweitens sehen wir jetzt, was erfüllt sein soll für diese n:

$$\frac{18}{n^2-7} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{18}{\epsilon} + 7 < n^2$$

Das ist erfüllbar! Wird mir ein ϵ vorgegeben, dann finde ich schnell ein n, für das diese Ungleichung wahr ist. Alle Nachfolger dieser natürlichen Zahl erfüllen die Gleichung dann auch und damit ist $a = 2$ Grenzwert.

Falls gar nicht so genau nachgefragt ist, sondern vielleicht gefragt ist: ab welchem $N \in \mathbb{N}$ liegt die Folge in der Umgebung mit $\epsilon = 1/10$, dann ist in unserer Aufgabe einfach für ϵ zwei einzusetzen. Es stünde dann da: $16 = 18/2 + 7 < n^2$. Das ist für $n = 4$ noch nicht erfüllt, aber für $N = 5$!

Monotonie:

Um Monotonie bei einer Folge a_n zu testen, bildet man entweder $a_{n+1} - a_n$ und schaut, ob das immer positiv ist, oder man bildet den Quotienten a_{n+1}/a_n. Ist dieser größer 1, so ist die Folge in einem Schritt gewachsen und es läge ein streng monotones Wachstum vor.

Wichtige Grenzwerte: siehe Buch S.62

Rechenregeln von Folgen: siehe Buch S.63

Reihen

Reihen sind einfach Summen über Folgen. Da hier das $\sum$ auftaucht, dazu die „Rechenregeln“:

$5 \cdot \sum(n^2) = \sum(5n^2)$ und andersherum. Man darf ja aus Summen ausklammern, bzw. alles durchmultiplizieren, wenn ein gemeinsamer Faktor vor der Klammer steht. Das Summenzeichen wirkt wie eine riesige Klammer um alle Summanden herum.

Das zweite sind die Laufzahlen, die meist mit k bezeichnet waren:

$$\sum_{k=1}^{7} 4k = \sum_{k=1}^{2} 4k + \sum_{k=3}^{7} 4k = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \sum_{k=3}^{7} 4k$$

Denn aus Klammern kann man einzelne Summanden ziehen. Dabei ändert sich bei uns aber die Zählweite des ks.

Geometrische Reihen:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{1}{1-q} \ bei\ n \to \infty,\ |q| < 1.$$

Dabei kann die Folge auch komplzierter Scheinen, weil sie einen Vorfaktor vor dem q^n hat oder weil noch etwas konstantes hinten addiert wird. Da aber einfach an die obigen beiden Regeln denken; Faktoren kann man herausziehen und einzelne Summanden kann man auch vor die Reihe schreiben. Dabei achtet auf „Punkt vor Strich“!

Arithmetische Reihen (die ich hier mit $k = 1$ beginne! Achtung!):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Hier sieht man, dass für $n \to \infty$ diese Art Reihe divergieren muss. Falls ihr wieder eine Zahl vor dem k habt, so zieht diese raus, steht noch etwas hinten an, so kann das auch heraus.

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{10}(5k+7) = \sum_{k=1}^{10}(5k)+\sum_{k=1}^{10} 7 = 5\sum_{k=1}^{10} k+\sum_{k=1}^{10} 7 = 5\frac{10(10+1)}{2}+10\cdot 7 = 5\cdot 55+70 = 345$$

Noch etwas abschließendes zu unseren Formeln für die beiden Reihen. Auf diesem Blatt stehen sie in der leichtesten Form; ohne Vorfaktoren und Konstanten. Falls das aber so ist in der Klausur, dann rechnen wir mit dem Summenzeichen herum, bis es passt. Das ist nicht schwer; ein letztes Beispiel:

Gegeben die arithmetische Folge der ungeraden Zahlen;
$1, 3, 5, 7, 9, ... \Rightarrow a_k = (2k-1)$, wobei wir dann mit $k = 1$ starten müssen, ansonsten produzieren wir mit $k = 0$ $a_0 = -1$ und das wollen wir nicht! Nun bilden wir die Reihe dazu:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k - n = 2(\frac{n(n+1)}{2}) - n = n(n+1) - n = n^2$$

Das Ergebnis ist erstaunlich schön; die Summe über die ungeraden Zahlen ergibt immer eine Quadratzahl.