Gebrauchsanweisung

Damit ein nochmaliges Durchgehen der Übungsaufgaben für euch einfacher ist, habe ich folgende Kommentierung verfasst. Sie ist keine Musterlösung und kann auch nicht den Mitschrieb in den Übungsgruppen ersetzen. Allerdings finden sich in diesem Text oft die Lösungen ohne weitere Ausführlichkeit wieder, damit soll ein Abgleich mit den eigenen Zetteln ermöglicht werden. Allerdings heißt das (was auch für meine Kommentierung gilt), dass Fehler zu finden sein werden! Bitte mailt mir so einen Fund gleich, damit ich ihn verbessern kann! Danke. Da ich eine Vielzahl von Gebieten der Mathematik, Physik und Chemie anspreche, aber natürlich nicht ausführen kann, lohnt es sich, bsp. ganz einfach mit Wikipedia die **Schlagwörter** zu suchen. Ich habe an den jeweiligen Stellen darauf geachtet, dass es auch einen Link zum Schlagwort gibt. Wer das nicht mag... Buchtipp: „Mathematische Methoden in der Pyhsik“ von Lang/Pucker, erschienen im Springer-Verlag. Falls Ihr auch mit den dort zu findenden Erläuterungen nicht klar kommt, bleibt euch noch, mich zu fragen. Von meinen Rechtschreibfehlern distanziere ich mich.

Viel Spass wünscht euch Steffen!

Stand: 04.01.2008 bzw. bis Blatt 7

Blatt 1

Aufgabe 1.1

Die **Graphen** deuten elementare Funktionstypen an. Diese sind in Reihenfolge (die Parameter lese man ab):

Gerade, Trigonometrische Funktion (sin/cos), Parabel, Exponentialfunktion, Trigonometrische Funktion (sin/cos), Hyperbel, Logarithmus, Kehrwert einer Exponentialfunktion, Betragsfunktion, Quotient trigonometrischer Funktionen (tan).

Die **Gerade** ist in den Naturwissenschaften die erste Annahme! Sie spiegelt einen linearen Zusammenhang wider.
Die **Parabel** ist die nächstkompliziertere Funktion (nämlich ein **Polynom** 2.Grades) und findet vor allem Anwendung in der Physik (**harmonischer Oszillator**!), wo ein linearer Zusammenhang unzureichend ist. Sie sind immer symmetrisch zur Scheitelpunktachse, daher lohnt es sich manchmal, sie auf diese besondere Form zu bringen.
Löst man die **Differentialgleichung** des harmonischen Oszis, so wird die Lösung der **Bahnkurve** (des schwingenden Teilchens bsp.) durch die sog. **trigonometrischen Funktionen Sinus** (bzw. **Kosinus**) beschrieben. Diese beiden Grundfunktionen bilden auch die Grundlage komplizierterer Funktionen, bsp. des **Tangens**.
Eigentlich ist jedoch die komplexe **Exponentialfunktion** Ausgangspunkt für eine saubere Definition der Winkelfunktionen sin bzw. cos. Dazu später mehr. Daher ist sie eine fundamentale Funktion auch in der Natur. Definiert man für alle $z \in \mathbb{C}$ $exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, so ist bsp. der komplexe Sinus $sin(z) := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Die Exponentialfunktion wurde ausführlich untersucht und da sie so wichtig ist, hat ihre **Umkehrfunktion** einen eigenen Namen: der (nicht immer eindeutig bestimmte) **Logarithmus** log (seltener ln). Man kann im Übrigen alle **Potenzfunktionen** a^b mit $a, b \in \mathbb{C}$ auf exp zurückführen. Damit ist diese Funktionenklasse ausreichend durch exp vertreten und somit wird überlicherweise nur sie verwendet.
Neben der **Betragsfunktion** abs bzw. $|x|$ sind noch die **Vorzeichenfunktion** sg(x), die **Wurzelfunktion** sqrt und die **hyperbolischen Funktionen** sinh und cosh zu nennen. Außer höherer Polynome sind weitere Funktionen in den angewandten Naturwissenschaften eher selten.

Aufgabe 1.2

Da später die **komplexen Zahlen** kommen und damit die Aufgabe etwas überflüssig wird, hier nur kurz die Lösungen: (a) $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$, (b) keine Lsg. in $\mathbb{R}$, (c) $x = -\sqrt[5]{10}$, (d) $x = 4$, (e) $x = -4$, (f) $x_{1/2} = 3/2 \pm 1$, (g) $x_1 = -4, x_2 = 0, x_3 = 3$, (h) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b/5\}$, (i) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \sqrt{3/2}\}$
Diese Mengennotationen sollten bekannt sein.

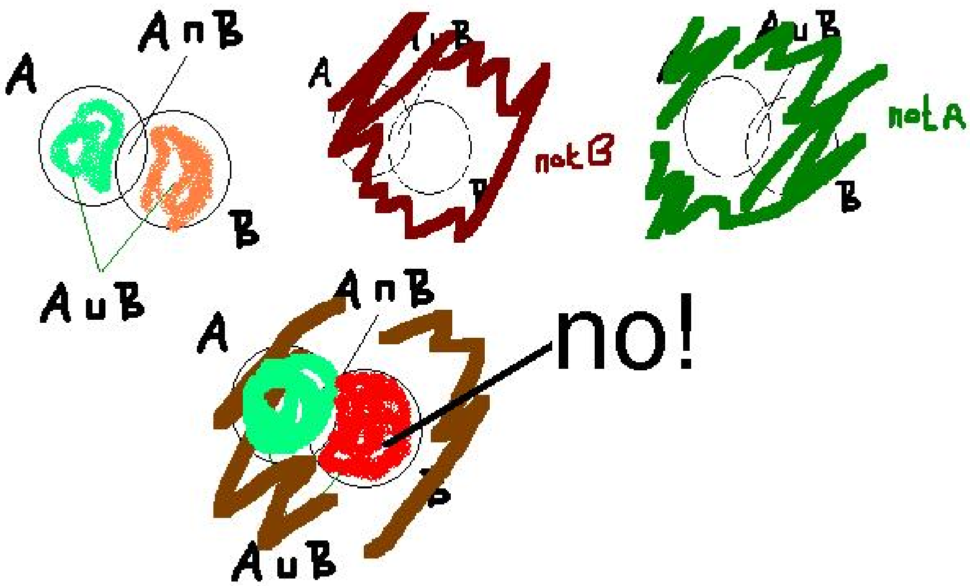
Aufgabe 1.3
Bijektivität ist ein sehr wichtiger, allerdings mathematischer Begriff. Er setzt sich aus zwei grundlegenderen Begriffen zusammen; der **Injektivität** und der **Surjektivität**. Injektivität sichert, dass nicht zwei Elemente via der Funktion f auf demselben Wert landen (bei $f(x) = x^2$ passiert das bsp. für ± 2). Surjektivität bedeutet, dass eine vorgegebene Menge auch wirklich „voll erwischt" wird. Gibt man obigem f als Wertebereich ganz $\mathbb{R}$, so bleiben die negativen reellen Zahlen unberührt, denn das Quadrieren bildet eben nur auf die positiven Zahlen ab. Anschaulich sichert die Bijektivität von Funktionen deren Umkehrbarkeit. Zu den Lösungen (ich verwende $\mathbb{D}_f$ bzw. $\mathbb{W}_f$ für die Definitions- bzw. die Wertemenge von f):
(a) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, implizit: $y - 2x - 1 = 0$, $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.
(b) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, implizit: $y - x^5 = 0$, $f^{-1}(y) = \sqrt[5]{y}$.
(c) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_f = [-18; \infty)$, implizit: $y - 3x^2 + 18 = 0$, hier liegt (s.o.!) keine Injektivität vor, damit auch keine Bijektivität. Also müssen wir geeignet einschränken, entweder auf die positiven oder die negativen reellen Zahlen. Damit finden wir maximale Bereiche lokaler(!) Umkehrbarkeit. Es ist dann $f^{-1}_{1/2}(y) = \pm\sqrt{\frac{y+18}{3}}$.

Aufgabe 1.4
Da es hier viele Möglichkeiten gibt, nur einiges zu den Begriffen:
Monotonie ist wie Bijektivität eine Eigenschaft von Funktionen (eigentlich von **Folgen**, aber es überträgt sich), der ebenfalls anschaulich ist: Gleichmäßigkeit im Wertezuwachs.
Punktsymmetrie ist genauso anschaulich!
Periodische Funktionen nennt man solche, für die immer gilt: $f(x + a) = f(x)$ für alle x und ein festes a (die Periode...); also die Fuktionswerte wiederholen sich einfach und werden bsp. schon alle im **Intervall** (wenn wir reell sind) $[0, a]$ angenommen. Sogar auch in $[0; a)$.
Da (j) nicht-triviale Funktionen ausschließt, bleibt nur die **Nullfunktion**.

Blatt 2

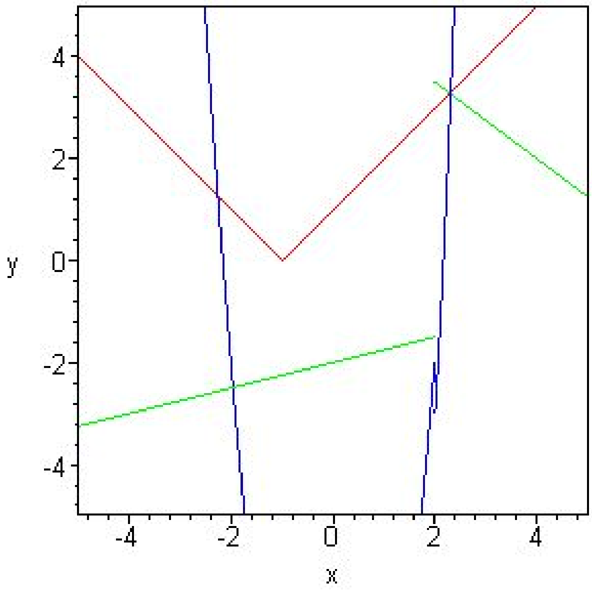
Aufgabe 2.1

Diese Aufgabe hätte auch auf einem 0.Blatt stehen können. Die Begriffe stammen aus der **Logik**, dem Fundament der Mathematik. Dort verzweigt es sich sofort, wenn man (wie in der vertrauten Mathematik üblich) vom ausgeschlossenen Dritten ausgeht. D.h., entweder hat etwas („**Aussage**“) eine Eigenschaft oder eben nicht. Dazwischen gibt es nichts (schon, aber das ist dann **Fuzzi logic**, die interessanterweise auch Anwendungen hat!). Nun beginnt man mit **Axiomen**, welche nicht-beweisbare Aussagen sind und baut sukzessive die kompliziertere Mathematik darauf auf. Dabei sei bemerkt, dass der Mathematiker weiß(!), dass nicht alle Aussagen als wahr oder falsch bewiesen werden können und sogar schlimmer; wir nie wissen werden, ob unser Axiomensystem widerspruchsfrei ist (s. **Gödel**). Trotzdem lässt es sich gut arbeiten mit unserer Mathematik. Um Axiome verknüpfen zu können brauchen wir **Junktoren** (lat. jungere=verbinden) und es stellt sich heraus, das wenige genügen (sogar zwei!). Bequemer ist aber das System mit *Not, And und Or* $[\neg, \vee, \wedge]$, weil dann Aussagen kürzer werden, wie eben bei komplexeren Alltagssprachen auch. Eskimos haben bestimmt hunderte Wörter für Schnee, das bei uns zu umschreiben, würde Bände füllen.
Bevor wir uns die Mühe machen, mit **Wahrheitstafeln** zu arbeiten, lösen wir die Aufgabe lieber mit **Mengendiagrammen**. Wir fangen damit an, dass wir uns die rechte Seite der **Äquivalenzgleichung** anschauen und uns die Diagramme malen. Dabei ist wichtig, dass sich alle beteiligten Mengen (hier A und B) schneiden! Das ist immer der Ansatz! Wir finden cremig-grün und braun drin und die rote Sichel ist raus (ergibt sich natürlich auch für die linke Seite der Gleichung...):



Aufgabe 2.2
Im Falle dieser einfachen **Symmetrien** heißt es nur, zu prüfen, ob das Vorzeichen unserer eingesetzten Zahl sich entweder gar nicht auswirkt oder nur so, dass sich der Funktionswert einfach rumdreht. Es geht natürlich auch anders und es gibt auch schwieriger zu sehende Symmetrien an anderen Raumkurven. Hier schaut man sich also einfach f(-x) an.
Lösung: (a) und (d) sind zur **Ordinate** und (c) und (e) zum Ursprung symmetrisch. Für (b) liegt weder noch vor. Das ist auch der Normalfall.

Aufgabe 2.3
(a) ist rot, (c) ist blau und (d) ist grün auf folgendem Diagramm:



Man erkennt die **Stetigkeit** von (a) und dass (c) wie auch (d) nicht stetig sind. (b) jedoch ist stetig, aber dies verdankt die zusammengesetzte Kurve der mathematischen Definition. Da $x = 2$ ausgenommen bleibt gegenüber (c) (darum haben wir (b) nicht gezeichnet!), zerfällt die reelle Achse in zwei **disjunkte** Teilmengen, auf denen beiden für sich genommen die Stetigkeit geprüft wird. und die beiden Polynome halten dem natürlich stand!

Aufgabe 2.4
Hier geht es um einen ganz einfachen Fall von **Modellierung**, einem wichtigen Werkzeug der Naturwissenschaftler, um Theorien an Rohdaten anpassen zu können.
Die Lösungen: (a) $x_1 = -1, x_2 = -5$, (b) mittels dem ganz allgemeinen Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - n1)(x - n2)$, wobei a, b, c freie Parameter und $n1, n2$ die davon abhängenden Nullstellen sind, findet man sofort $f(x) = a(x^2 - 4)$, wobei a=1 nach Voraussetzung ist und somit ist die Lösung eindeutig!

Blatt 3

Aufgabe 3.1

Zum **Fundamentalsatz der Algebra** ist zu sagen, dass er bei einem komplexen Polynom *eine* Nullstelle garantiert. Dass dann ein Polynom n.Grades gerade n Nullstellen hat, ist eine Folgerung per **Induktion** über den Grad, welche praktisch mit der bekannten **Polynomdivision**, nämlich dem Abspalten von (hier:) **Linearfaktoren**, übereinstimmt. Also denke man sich einfach $x \in \mathbb{C}$ und schon stimmt die Aufgabe, da es zwar im Reellen noch den Fall **quadratisch irreduzibler Polynome**, die *nicht* in Linearfaktoren zerfallen, gibt, was aber hier nicht passiert.
(a) $P(x) = 3 \cdot (x - 0) \cdot (x - 4/3)$
(b) $P(x) = 1 \cdot (x + 3) \cdot (x + 1)$
(c) $P(x) = 1 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$

Aufgabe 3.2

Hier wird noch einmal die Polynomdivision wiederholt. (a)
$f(x) = x^2 + 2x + 2 + \frac{x-2}{x^2+2x+3}$
(b) $g(z) = z^5 - 3z + \frac{2z-4}{z^2-3}$

Aufgabe 3.3

Hier wird noch einmal die **Partialbruchzerlegung** wiederholt. Sie ist ein wichtiges Werkzeug und muss bekannt sein. Sie ist allerdings auch nicht schwer, denn mittels dem **Koeffizientenvergleich** wird letztlich die Suche der Parameter zur Aufgabe, ein mehr oder weniger langes LGS (**lineares Gleichungssystem**) zu lösen, was mit dem Gaußschen Verfahren oder irgendwie anders gut machbar ist.
(a) $g(x) = \frac{9/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{5/2}{(x+1)^2}$
(b) $g(z) = z^5 - 3z + \frac{2z-4}{z^2-3}$

Aufgabe 3.4

Hier wird nach Auswerten der Infos das Polynom $f(x) = -1/8x^3 + 8/9x$ gefunden. Schwierigkeit kann die Info mit dem Betrag machen, allerdings kann man dann einfach fallunterscheiden und einmal so tun, es sei $f(-1) = 1$ und gleicht dies ab mit der Info für $x = 3$, stimmts nicht, war es halt doch die -1.

Blatt 4

Aufgabe 4.1
Hier hat man es mit dem allgegenwärtigen Faktor e^{-kt} zu tun, der in der Natur häufig auftritt, insbesondere bei diesem radioaktiven Zerfall. Der wichtigste Verwandte ist der sog. **Boltzmann-Faktor**.
Außer Logarithmieren zu können, erfordert dieser Aufgabentyp keine weiteren Kenntnisse.
Lösung: (a) Halbwertszeit: $t = \frac{\log 2}{\log k}$ bringt $t = 0,94d$. Mittlere Lebensdauer $\tau = 1/k = 1,35d$. (b) liefert $m(5d) = 64mg$.

Aufgabe 4.2
Da ist er auch schon! Hier muss man sich gut mit den Rechenregeln des Logarithmus (**Funktionalgleichung**!) auskennen. Dann ist es eine technische Sache und man findet:
(a) $A = 1,63 \cdot 10^{14}\ Hz$ und $E_a = 10,13\ kJ/mol$
(b) $T_{10k_0} = 314\ K$
(c) da wir einen „linearen“ Zusammenhang zwischen k und $exp(1/T)$, besteht dieser auch zwischen $log(k)$ und $1/T)$. Da im exp allerdings ein negatives Vorzeichen zu finden ist, wird es eine Gerade mit negativer Steigung geben.

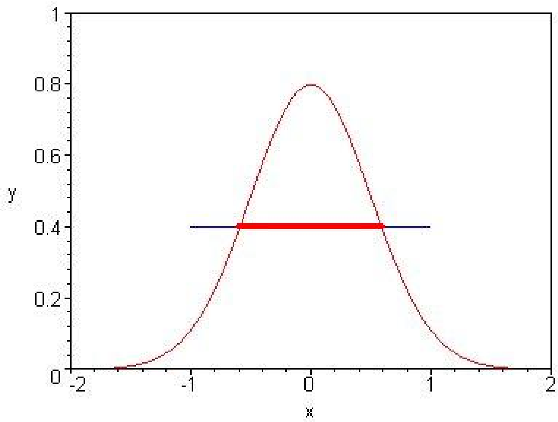
Aufgabe 4.3
Liegen einem komplizierte Funktionen vor, so kann man sie sich oft aus einfachen, bekannten zusammengebaut herleiten. Offensichtlich haben wir eine **Kurvenschar** mit Scharparameter t. Wir erkennen, dass im Prinzip die Funktion $g(x) := 1 - sin(x)$ die Definierende ist, das t skaliert allenfalls die Ordinate. Wem nicht klar ist, was g macht, der soll sich diese wiederum aus h und j zusammengesetzt vorstellen, h ist die konstante 1-Funktion und j der nun doch elementare Sinus!
Lösung: (a) mit obigen Bemerkungen ist eigentlich alles gesagt. Hat g eine Nullstelle, so auch f, die Periode bleibt gleich, die Polstellen damit auch.
(b) $\mathbb{D}_g = [0;2] \Rightarrow \mathbb{D}_f = t[0,2] = [0,2t]$
(c) $g(x) = (6/\pi) \cdot x - 3,\ t = 5\pi/3$

Aufgabe 4.4
Mit den aus der Vorlesung übernommenen Definitionen ist diese Aufgabe nur zum Nachrechnen. Die **Additionstheoreme** kommen sowieso ganz einfach, wenn man komplexe Zahlen zur Verfügung hat und die Eulersche Polardarstellung.

Blatt 5

Aufgabe 5.1

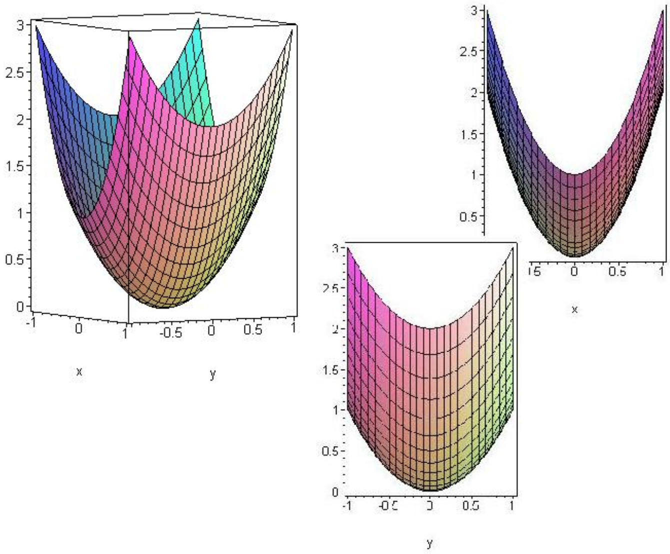
Die Normalverteilungen $NV(\mu, \sigma)$ spielen eine große Rolle in der Natur. Sie erfährt eingehende Untersuchung in der Teildisziplin Stochastik. Man stellt fest, dass die SNV (Standardnormalverteilung) schon ausreicht, um alle anderen zu beschreiben (ist so wie mit dem exp und den anderen Potenzfunktionen). Die Standardnormalverteilung ist wie alle anderen NV bestimmt durch zwei Paramter; ihren Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ, die noch garantiert, dass die **Gauß'sche Glockenkurve** als **Wahrscheinlichkeitsfunktion** über den ganzen **Wahrscheinlichkeitsraum** Ω integriert 1 ergibt. Die 1 ist wieder wegen dem ausgeschlossenen Dritten! Denn die Gesamtwahrscheinlichkeit aller möglichen Ausgänge muss 1 sein! Es gilt formal $SNV = NV(0, 1)$.
(a) Wir werden gegen Ende der Vorlesung noch den Zusammenhang herleiten, der zwischen dem Exponent und k besteht. Hier ergibt sich einfach $k = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2}{\pi}$.
(b) $\Delta_H = 2\sqrt{ln2/\alpha} = \ 1,18$ - ebenfalls mit einer Formel aus der Vorlesung.
(c) Der rote Balken ist die Halbwertsbreite.



Aufgabe 5.2

Hier kommt wieder einmal ein ganz zentraler Inhalt, nicht mathematischer Art, jedoch physikalischer: die **ebene (harmonische) Welle**. Üblich ist oft $U(x, t) = U_0 \cdot cos(kx - \omega t)$, wobei k die **Wellenzahl** und ω die **Kreisfrequenz** ist. Wer nachschlägt, findet mittels leichter Umformungen, dass dann das ν gerade die **Frequenz** ist und c die Ausbreitungsgeschwindigkeit, bsp. die **Lichtgeschwindigkeit** für **elektromagnetische Wellen**.

Aufgabe 5.3



Man sieht hier die Schnitte entlang der Achsen. Es handelt sich beide mal um Parabeln. Schaut man in die xy-Ebene (Schnitt durch z-Ebene), dann ist die Gleichung eine Ellipsengleichung. **Ellipsen** und deren Darstellungen sollten wie die der **Hyperbeln** bekannt sein!

Aufgabe 5.4

Wie besprochen, kann man elegant **Drehmatrizen** nehmen. **Matrizen** der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

stellen **Drehstreckungen** in der Ebene dar. Ist insbesondere $a^2 + b^2 = 1$, so sind es die einfachen Drehungen. Sie ermöglichen wie gesehen eine Idenditifizierung (**Isomorphismus**) der komplexen Zahlen mit diesen 2x2-Matrizen!

Blatt 6

Aufgabe 6.1

Das bsp. bei Zylindersymmetrie **Zylinderkoordinaten** ZK besonders einfach sind, liegt auf der Hand. Daher hängt die Wahl des Bezugssystems normalerweise von den Gegebenheiten ab. Einen Würfel in ZK beschreiben zu wollen, wäre eine Katastrophe! Andersherum kann man die Orbitale nicht mit KK sinnvoll beschreiben. Das werdet Ihr beim Separationsansatz der **Schrödingergleichung** sehen.

Aufgabe 6.2

Wieder eine Aufgabe enormer Wichtigkeit! Die einzelnen Teilaufgaben sind nur Anwenden der Koordinatentransformationen. Anschauen sollte man sich auch die Volumenelemente der einzelnen KS: $dV = dxdydz = rdrd\phi dz = r^2 sin\theta drd\phi d\theta$. Die Vorfaktoren sind nicht direkt einleuchtend, halten aber einer genauen geometrischen Untersuchung stand (viele **Projektionen**...). Schöner ist allerdings, einfach die **Jacobi-Determinante** auszurechnen...
Das Beispiel beschreibt ein Wasserstoffatom im Grundzustand (das Elektron hat den klassischen Bohr-Radius $r = 0.53\ \overset{o}{A}$).

Aufgabe 6.3

Ich gebe hier bewußt einen exakten mathematischen Beweis für (d) an, damit Ihr den auch einmal gesehen habt.
Annahme: Die Folge $a_n = 1/n^2$ konvergiert gegen 0.
Beweis: zu zeigen ist, dass für alle reellen $\epsilon > 0$ ein gewisses Folgeglied a_N existiert, ab dem und für alle weiteren Folgeglieder a_n mit $n > N$ auch der Abstand zwischen dem Grenzwert a und der Folge kleiner wird als dieses beliebig gewählte ϵ. Wir bestimmen einfach $N(\epsilon)$, wobei wir ausnutzen, dass die Folge positiv ist und nie 0 wird.

$$|a_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow |a_n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |a_n| < \epsilon \Leftrightarrow 1/n^2 < \epsilon \Leftrightarrow n^2 > 1/\epsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\epsilon}$$

Da n natürlich ist, ϵ jedoch reell, runden wir den ggf. gebrochenen Zahlwert von $1/\epsilon$ einfach ab und addieren 1. Dann sind wir sicher größer mit unserem n als dieser Wert und damit ist der Abstand zur Null kleiner als das ϵ. Man setzt noch formal $N := [1/\epsilon] + 1$ und daraus folgt die Behauptung. Die eckige Klammer heißt **Gaußklammer** und rundet einfach ab, egal wie viel hinter dem Komma steht: $[1.96] = 1$.

Aufgabe 6.4

$a_n = sin(n \cdot \pi/2)$ mit Häufungspunkten $0, \pm 1$.

Blatt 7

Aufgabe 7.1

Ihr könnt Euch hier beispielsweise das CH_4 unter der gegebenen Konfiguration vorstellen. Das viermalige Auftreten des H-Atoms rechtfertigt die Symmetrie und da alle mit dem C-Atom binden, bleibt keine andere Möglichkeit eines symmetrischen Aufbaus außer einem **Tetraeder**.

Aufgabe 7.2

Die Aufgabe eingnet sich wunderbar, um in die **spezielle Relativitätstheorie** einzusteigen (**Lichtuhr**).

Aufgabe 7.3

Um beliebig komplizierte Folgen zu untersuchen, sieht man sie einfach als Zusammensetzung einfacherer Folgen, so dies denn möglich ist. Denn: konvergieren schon die Teilfolgen für sich, dann auch die gesamte Folge (Rechenregeln mit dem **Limes** beachten!). Hier haben wir $a_n = 1/n^2$ und $b_n = 1 + 1/n$ gegeben. a_n kennen wir bereits und wir wissen um deren Konvergenz gegen 0. b_n lässt sich verstehen als $b_n = c_n + d_n$ mit $c_n = 1$ und $d_n = 1/n$. Dass die Einsfolge gegen 1 konvergiert, ist trivial. Nun wissen wir von d_n hoffentlich auch, dass sie gegen 0 konvergiert. Der Beweis wäre kein Problem! Somit ergibt sich für b_n der Grenzwert 1 und damit für die zusammengesetzte Folge ebenfalls. Zu bemerken ist noch dies:
$0 < 1/n^2 < 1/n$ für alle natürlichen Zahlen. Klingt einfach und ist es auch. Dies kann man aber als **Sandwichtheorem** auswerten. Hätten wir schon gewusst, dass 1/n **Nullfolge** ist, so wäre Aufgabe 3 von Blatt 6 ein Einzeiler!

Aufgabe 7.4

Hier braucht man nur die Idee, die größte Potenz von n auszuklammern. Dann stehen im Zähler wie im Nenner trivial konvergente Folgen. Wir werten diese einzeln aus und haben den Grenzwert der zusammengesetzten Folge. Dabei kann es wie in (d) passieren, dass scheinbar divergente Teilfolgen eine konvergente Folge erzeugen. Es ist aber so, dass man in *jedem* Schritt die beiden Brüche miteinander verschmelzen muss (Hauptnenner!) und dadurch hebt sich der (nur scheinbar) divergente Anteil heraus. Ein schöner Beweis für den Tipp: Man schreibe die Summe $\sum := 1 + 2 + ... + n = 1/2(2\sum) = 1/2(\sum + \sum)$. Da die Summe endlich ist, konvergiert sie, also dürfen wir sie umordnen. Wir addieren den jeweils ersten Summanden der erste Reihe mit dem letzten der zweiten, also $1 + n$. Dann nehmen wir uns $2 + (n - 1)$ vor usw. insgesamt müssen wir das n-mal machen. Man sieht aber, dass wir immer $n + 1$ als Ergebnis erhalten, somit ist $\sum + \sum = n \cdot (n + 1)$ und damit folgt der Tipp.