Lösungsvorschläge zur 9.Übung

Aufgabe 9.1: (je Teilaufgabe 2 Punkte)

1.) konvergent für $|x| < 1$.

2.) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn ein $0 < a < 1$ existiert, so dass $|a_{n+1}/a_n| < a$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

3.) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0 \Rightarrow f$ hat mindestens eine Nullstelle in $[a, b]$.

4.) $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

5.) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

6.) $f'(x) = \lim_{h \to 0}(f(x + h) - f(x))/h$

7.) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = (f(a)-f(b))/(a-b)$

8.) Mit einem $x^* \in [x, x + h]$ (für $h > 0$), bzw. $x^* \in [x + h, x]$ (für $h < 0$):

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^{4} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(x^*)$$

9.) $f(x) = x(\ln x - 1)$

10.) wohldefiniert für $s > -1$.

Aufgabe 9.2: (3+3+2 Punkte)

a) Konvergent, da es sich um die Geometrische Reihe handelt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}$$

b) Divergent, denn für $n^3 \geq 40$ finden wir folgende Minorante:

$$\left|\frac{n^3 - 20}{n^4 - 3n + 1}\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{n^3 - 20}{n^3 - 3 + \frac{1}{n}}\right| \geq \frac{1}{n}\left|\frac{n^3 - 20}{n^3}\right| = \frac{1}{n}\left|1 - \frac{20}{n^3}\right| \geq \frac{1}{2n}$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch die obige Reihe.

c.) Da $|a_n| \leq [(n + 1)/(2n)]^n$ folgt die Konvergenz mit dem Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{n + 1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{4} \qquad \text{für } n \geq 2$$

Aufgabe 9.3: (je Teilaufgabe 3 Punkte)

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{(e^x)} e^x \\ g'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ h'(x) &= h(x)ake^{-kx} \end{aligned}$$

Aufgabe 9.4: (je Teilaufgabe 3 Punkte)

a) Mittels Substitution $\varphi(x) = 3x^4 - x^3$

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{4x^3 - x^2}{x^3 - 3x^4} &= -\frac{1}{3}\int_1^3 \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = -\frac{1}{3}\int_{\varphi(1)}^{\varphi(3)} \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{3}(\ln(\varphi(3) - \ln(\varphi(1)) \\ &= -\frac{1}{3}(\ln(3^5 - 3^3) - \ln 2)\end{aligned}$$

b) Hier gibt es mittels Partieller Integration zwei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit:

Wähle $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x^2$ (also $g(x) = \frac{1}{3}x^3$):

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 \ln x\,dx &= \int_1^2 f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f'(x)g(x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\frac{1}{3}x^3\,dx = \frac{1}{3}(8\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}(8\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(8\ln 2 - \ln 1) - \frac{7}{9}\end{aligned}$$

2. Möglichkeit: (etwas aufwändiger)

Wähle $f(x) = x^2$, $g'(x) = \ln x$ (also $g(x) = x(\ln x - 1)$):

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 \ln x\,dx &= \int_1^2 f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f'(x)g(x)\,dx \\ &= x^3(\ln x - 1)\Big|_1^2 - \int_1^2 2x^2(\ln x - 1)\,dx \\ &= x^3(\ln x - 1)\Big|_1^2 - 2\int_1^2 x^2 \ln x\,dx + 2\int_1^2 x^2\,dx\end{aligned}$$

Durch Addition des Terms $2\int_1^2 x^2 \ln x\,dx$ erhält man:

$$\begin{aligned}3\int_1^2 x^2 \ln x\,dx &= x^3(\ln x - 1)\Big|_1^2 + 2\int_1^2 x^2\,dx \\ &= x^3 \ln x\Big|_1^2 - x^3\Big|_1^2 + \frac{2}{3}(2^3 - 1) \\ &= x^3 \ln x\Big|_1^2 - 7 + \frac{14}{3}\end{aligned}$$

Also:

$$\int_1^2 x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}(8\ln 2 - \ln 1) - \frac{7}{9}$$

Aufgabe 9.5: (je Teilaufgabe 3 Punkte)

Es ergibt sich alles aus der Dimensionsformel:

$$n = dim\,(Ker(A)) + rang(A)$$

a) A bijektiv bedeutet $Ker(A) = \{0\}$ und $R(A) = \mathbb{R}^m$. Also aufgrund der Dimensionsformel

$$n = rang(A) = m$$

b) A injektiv ist gleichbedeutend mit $Ker(A) = \{0\}$, also $dim\,Ker(A) = 0$ und

$$n = rang(A)$$

c) A surjektiv ist gleichbedeutend mit $R(A) = \mathbb{R}^m$, also

$$m = rang(A)$$