

Motivation

Gleichungssysteme tauchen ganz natürlich beim Modellieren auf. Lineare Gleichungssysteme sind dabei die am einfachsten zu behandelnden. Oft kann man auch wirklich die Realität linearisieren. Es ergeben sich häufig rekursive Gleichungen:

Betrachten wir beispielsweise ein Zellwachstum in vitro. Dann haben wir im einfachsten Fall eine Nährlösung, die regelmäßig aufgefüllt wird, einen gewissen Platz zur Verfügung und eine Anfangsmenge von Zellen. Zudem entnimmt ein Laborant vielleicht noch ab und an Zellen für Experimente.

Wenn wir unser Modell in diskreten Zeiten verfolgen - vielleicht schauen wir jeden Abend nach - dann kann die Mathematik sehr hilfreich sein:

Sei $n(t)$ die Menge der Nährlösung und $z(t)$ die Menge der Zellen.

Wieviel von $n(t)$ an einem Tag verbraucht wird, hängt von der Menge der Zellen ab: $n(t+1) = n(t) - k \cdot z(t)$. Außerdem kennt der Laborant so einigermaßen den „Appetit-Faktor“ k der Zellen. Dieser ist aber noch temperaturabhängig, denn ist es zu warm oder zu kalt, stellen die Zellen ihr Wachstum ein... Also ergibt sich $n(t+1) = n(t) - k \cdot z(t) + k^* \cdot z(t)$ mit k^* als der in einer Tabelle nachgeschlagenen Wert, der wohl geringfügig anders als k ist.

Was ist mit $z(t)$? Die alten Zellen verbleiben und sie vermehren sich sogar; das jedoch in Abhängigkeit vom Nahrungsangebot, es gibt pro Nahrungsmittleinheit vielleicht c Zellen. Der Laborant entnimmt eine feste Menge z^* jeden Tag, die er zum experimentieren braucht. Also gilt: $z(t+1) = z(t) + c \cdot n(t) - z^*$.

Interessant wäre jetzt, wie gross die Kultur sein muss, damit sie nicht allzu schnell aufgebraucht ist. Denn: Zellen sind teuer. Andererseits mutieren sie auch rum und irgendwann braucht man Frischzellen. Also braucht man nicht einen Idealfall von einem Gleichgewicht zwischen Entnahme und Wachstum finden! Meist wäre also eine Zeit vorgegeben wie lange die Zellen reichen sollen und danach richtet sich die Einkaufsmenge. (Nun sollte auch jeder verstehen, warum man in den Brutschränken konstante Temperaturen hält!!!)

Einführung

Nun kann man das inhaltliche Feld verlassen und sich bei der symbolischen Sprache Mathematik einnisten.

Entweder kann man diese LGS immer mittels ineinander einsetzen, rumprobieren o.ä. lösen. Man kann jedoch auch einmal versuchen, etwas mehr dahinter zu sehen. Dies führt dann direkt zu Vektorräumen, Matrizen und Eigenwerten.

Letztlich kann man ja sich einen zweidimensionalen Raum vorstellen, in dem Nährlösungs-Zellen-Vektoren leben. Diese haben einen Eintrag in der ersten Zeile (Menge der Nährlösung) und einen in der zweiten (Anzahl der Zellen).

An einem Tag hat der Vektor die Form $(n_t, z_t)^t$, am nächsten Tag $(n_{t+1}, z_{t+1})^t$. Und das wiederholt sich alle Tage wieder. Im Prinzip durchläuft man dann eine Abfolge von Werten in unserer neuen Welt, die hier eine Ebene ist. Damit kann man schon einmal den Folgencharakter der Rekursion erkennen.

Zudem wird jeder Schritt nach der selben Vorschrift ausgeführt. Im eindimensionalen, also bei Zahlen, nannten wir das eine Abbildung oder auch Funktion. Im Höherdimensionalen übernimmt das eine sogenannte Matrix; sie bildet den kompletten Vektor auf einen neuen Vektor ab. Schreibweise: $v_{t+1} = M \cdot v_t$. Wie man eine solche Matrixmultiplikation genau ausführt, kommt später. Wichtig ist hier: Man kann ein LGS auffassen als eine Vorschrift wie ein System von Dingen (hier: Nahrung und Zellen) woanders hin abgebildet wird (hier: wieder auf Nahrung und Zellen).