

Anschauung

Die Anschauung ist wie immer das wichtigste. Denn solange man Mathematik als Werkzeug verwendet, versucht man ja damit etwas aus seiner Anschauung und seinem Denken zu formalisieren. *Der folgende Zugang zur Differentiation ist numerisch gewählt, da ich ihn für den sinnvollsten halte.* Vergesst einmal bitte, was Ihr in der Schule über *Ableiten* gelernt habt, weil dies höchstwahrscheinlich den Kern nicht getroffen hat.

Geben wir uns einmal eine (vernünftige, keine verrückte) Funktion vor.

Nehmen wir einmal an, wir kennen sie in einem festem Punkt x_0 . Nun wollen wir gerne von diesem Punkt auf seine Umgebung schließen. Wäre die Funktion verrückt, dann könnten wir das sowieso vergessen. Vielleicht haben wir aber Glück und eine schöne, stetige und glatte Funktion erwischt.

Ein Funktionswert in direkter Umgebung zu $f(x_0)$ soll bsp. $f(x_0 + h)$ sein. Frage: Gibt es eine Darstellung wie bsp.

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + m \cdot h$$

Das meint anschaulich einfach: Wir können einen Umgebungsfunktionswert annähern durch eine Gerade mit Aufpunkt $f(x_0)$ und Steigung m (habe ich mal so wie in der Schule bezeichnet).

Das Ungefährzeichen stört. Das bekommt man natürlich banal weg, indem wir schreiben:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h + \text{Rest}$$

Das ist aber keine Hilfe, denn was ist dieser Rest? *Es ist irgendein Fehler, den wir wohl machen, außer unsere vorgegebene Funktion war so einfach wie vielleicht eine Gerade.* Nun fordert man einfach: Geht dieser Rest gegen Null für $h \rightarrow 0$ und zwar schneller als es das h tut, dann wollen wir zufrieden sein und das m oben die Ableitung an der Stelle x_0 nennen. Das war's. Wer das versteht, hat es gut in der weiteren Mathematik.

Man nennt das „Gegen-Null-Streben“ dieses Restes *von mindestens quadratischer Ordnung*. Das meint: ist vielleicht h gegen null wie eine Abfolge von $1, 1/2, 1/3, \dots$, dann sollte der Rest wie bsp. $1, 1/4, 1/9, \dots$ abnehmen.

Wer hier eine Ähnlichkeit zur Taylor-Entwicklung bemerkt, hat völlig recht. Taylern bis zum linearen Glied ist Ableiten. Will man eine Funktion aber nicht nur in einer unendlich kleinen Umgebung richtig approximieren, dann muss man mehr Glieder der Taylorreihe anfügen.