Übungen zur Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 07)

Prof. J. Warnatz, Dr. W. Bessler

Aufgabe 1:

Die Matrix A einer linearen Transformation bildet den Vektor $\vec{x}$ auf $\vec{b}$ ab.

a.) Zeigen Sie, das für die inverse Matrix A^{-1} gilt: $A^{-1}\vec{b} = \vec{x}$.

b.) Berechnen Sie mit Hilfe der inversen Matrix von A den Vektor $\vec{x}$ für gegebene

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der Inversion (Punktspiegelung) im dreidimensionalen Vektorraum. Welche Vektoren behalten ihre Richtung bei, wenn zwei Vektoren, die der Gleichung $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ genügen (λ reell), als gleichgerichtet aufgefasst werden?

Aufgabe 3:

Die folgenden Matrizen geben lineare Transformation vor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beschreiben Sie anschaulich (z.B. an Hand einer Skizze), wie sich die durch die Matrizen vorgegebenen Abbildungen auf die Vektoren (1,0,0), (0,1,0) und (0,0,1) auswirken. Handelt es sich um eine Drehung, Spiegelung oder Inversion? Geben Sie falls möglich Drehwinkel und Drehachse oder die Spiegelebene an. Welche der Matrizen ist orthogonal?

Aufgabe 4:

In einem dreidimensionalen Koordinatensystem befindet sich ein Ammoniakmolekül am Koordinatenursprung. Dabei liegt das Stickstoffatom auf der z-Achse, das erste Wasserstoffatom bei (1,0,0) und die restlichen beiden Wasserstoffatome in der xy-Ebene bei z=0.

a.) Berechnen Sie die Koordinaten der restlichen Wasserstoffatome und fertigen Sie eine Skizze des Moleküls im Koordinatensystem an.

b.) Eine Drehmatrix ist die Matrix einer linearen Transformation, bei der Vektoren bei einer festen Drehachse um einen festen Winkel gedreht werden. Bestimmen Sie die Drehmatrix d_1, die eine Drehung im Uhrzeigersinn um 120° um die z-Achse bewirkt. Zeigen Sie für d_1 die Korrektheit der Matrix durch Anwendung auf die Vektoren der drei Wasserstoffatome.

c.) Eine Spiegelmatrix ist die Matrix einer linearen Transformation, bei der Vektoren an einer festen Ebene gespiegelt werden. Bestimmen Sie die Spiegelmatrix s_1, die einer Spiegelung an der xz-Ebene (y=0) entspricht.

d.) Benutzen Sie die Gruppentafel des Ammoniaks, um die restlichen Matrizen für die Symmetrieoperationen des Ammoniakmoleküls d_2, d_3, s_2, s_3 zu berechnen. Zeigen Sie für s_3 die Korrektheit Ihrer Lösung durch Anwendung auf die Vektoren der drei Wasserstoffatome.

Hinweis: Lösen Sie zuerst Aufgabe 3 und machen Sie sich noch einmal mit den Dreh- und Spiegelgruppen des Dreiecks vertraut.