Verteilungen

Verteilungen sollen modellieren, wie sich Zufallsvariablen verhalten. Abhängig vom (bekannten) Wahrscheinlichkeitsraum und von der (bekannten) Art der Frage, die man hat, gibt es verschiedene Verteilungen zur Auswahl. Die für die Vorlesung relevanten betrachten wir im Folgenden. Dabei ist noch erwähnenswert, dass wir uns mit normierten Verteilungen befassen, will heißen, dass die Gesamtw'keit (Summe der Einzelw'keiten im diskreten Fall bzw. Integral über $\mathbb{R}$ im kontinuierlichen Fall) auf 1 festgesetzt ist.

Diskrete Räume, Kontinuum

Wenn wir nun den W'raum kennen, vereinfacht sich unsere Welt erheblich.
Wir leben dann mit den Variablen entweder in diskreten Räumen, will heißen, es gibt bsp. den Erfolg 1, den Mißerfolg 0, die wir erreichen können, aber es gibt keine reellen Werte dazwischen. Man denke an die Münzwürfe; die Münze wird schon nicht schräg auf der Kante liegen bleiben.

Oder wir leben in einer uns vertrauteren Welt der kontinuierlichen Variablen. Bsp. könnte es um die Messung von Körpergrößen gehen und dabei gibt es eine Reihe von Kommazahlwerten, misst man bsp. in Metern.

Je nachdem greift man auf die diskreten Verteilungen (bei uns sind das Binomial-, Geometrische und Poisson-Verteilung) zurück oder man geht ins Kontinuum und damit zu den trivialen Gleichverteilungen (die wir uns sparen) und zu den vielen Normalverteilungen und zu den Exponentialverteilungen.

Parameter der Verteilungen

Die Verteilungen haben bestimmte Kenngrößen, im diskreten Falle sind es n als Anzahl der Versuche, p als Erfolgsw'keit und $q = 1 - p$ als Gegenereignis. Bei Poisson tritt mit $m = np$ noch eine Ersatzvariable auf.

Bei den NV sind es μ und σ, bei der Exponentialverteilung nur μ.

Die diskreten Verteilungen mit ihren Dichtefunktionen

(i) Binomialverteilung. Gegeben $n,\ p$; $EX = np$, $VAR = npq$, gesucht P(X=k). Dichtefunktion:

$$P(X = k) = (\overset{n}{k})p^k q^{n-k}$$

(ii) Poissonverteilung (geht aus der Binomialverteilung hervor, wenn $n >> 1$ und $p << 1$). Gegeben $EX = VAR = m$, gesucht P(X=k). Dichtefunktion:

$$P(X = k) = e^{-m} \cdot \frac{m^k}{k!}$$

(iii) Geometrische Verteilung. Gegeben p, $EX = 1/p$, $VAR = \frac{1-p}{p^2}$ gesucht k.

Dichtefunktion:

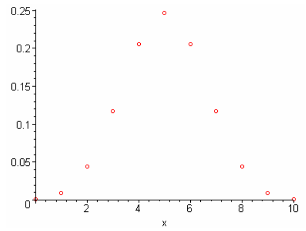
$$P(X = k) = p \cdot q^{k-1}$$

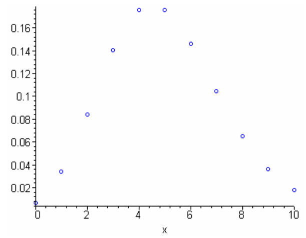
Wann verwendet man aber welche Funktion?

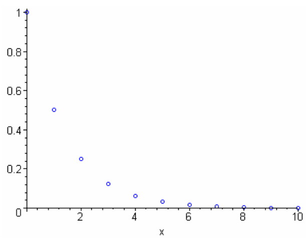
Die Binomialverteilung zählt ja die Anzahl von Erfolgen pro eine feste Anzahl von Experimenten. Haben wir diskrete ZV und eine Frage dieser Art, so wählen wir sie. Sind andererseits n und p wie in (ii) angedeutet, so ist Poisson sicher einfacher und auch ausreichend genau.

Die geometrische Verteilung ist eine Wartezeit-Verteilung, man denke beispielsweise an das Würfeln bei Mensch-Ärgere-Dich-Nicht; um da aus dem Haus zu kommen, brauchen wir die 6. Was vorher fällt, ist uns da egal.

Um sich die Verteilungen zu veranschaulichen, im Folgenden noch die Plots (Binomial, Poisson, Geometrisch):







Die kontinuierlichen Verteilungen mit ihren Dichtefunktionen

(i) Normalverteilungen $N(\mu, \sigma)$ und die Standardnormalverteilung $N(0, 1)$, $EX = \mu$, $VAR = \sigma^2$, gesucht $P(X \leq k)$. W'keitsintegral über Dichtefunktion:

$$P(X \leq k) = \int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

Die SNV zieht man gewöhnlicherweise heran, wenn es um theoretische Betrachtungen geht oder wenn man wie wir nur eine Wertetabelle für diese hat. Ansonsten sind beide Arten gleichwertig. Die NV sind die wichtigsten Verteilungen, da sie in der Natur am häufigsten auftreten, besonders, da bei Messungen sich die unbekannten Fehler wieder normalverteilen!

(ii) Exponentialverteilung, gegeben μ, $EX = \frac{1}{\mu}$, $VAR = \frac{1}{\mu^2}$, gesucht Wartezeit P(X=t). W'keitsintegral über Dichtefunktion:

$$P(X > t) = \int_{0}^{t} e^{-\mu t} dt = \mu e^{-\mu t}$$

Die Exponentialverteilung ist die stetige Fortsetzung der geometrischen Verteilung vom Diskreten ins Kontinuum und wird dementsprechend eingesetzt.

Um sich die Verteilungen zu veranschaulichen, im Folgenden noch die Plots (SNV, Exponential):