Lösung: Aufgabe 1

(a) Die Rekursionsgleichung lautet:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99/100 & 1/300 \\ 299/300 & 1/100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \; mit \; Anfangswert \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten ergeben sich so, da die eine Lösung immer einen Liter, die andere immer drei Liter enthält und daher zehn Milliliter anteilig verschieden sind.

Für den in den Lösungen enthaltenen Zucker gilt natürlich dieselbe Gleichung, da wir von einer idealen Mischung ausgehen.

Die Koeffizientenmatrix bezeichnen wir mit A.

Damit ergibt sich die Lösung als Funktion der Anfangswerte (siehe B5A2) zu:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Gefragt ist nach stationären Lösungen; diese liegen vor, wenn irgendwann beide Lösungen immer dieselben Mischungen bleiben. Es soll also gelten:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{pmatrix} \quad mit \quad \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}.$$

Das ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{pmatrix}.$$

Schreibt man dieses LGS aus, so soll also gelten:

$$\begin{aligned} -1/100 \cdot \overline{u} \; +1/300 \cdot \overline{v} &= 0 \\ +1/100 \cdot \overline{u} \; -1/300 \cdot \overline{v} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Dieses LGS ist nicht unabhängig, denn beide Zeilen sind identisch. Es ergibt sich also eine Lösungsschar für (1):

$$\overline{v} = 3\overline{u}, \; \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

Nun kann man weitere Forderungen an u,v stellen: bei uns ist ja der Gesamtzuckergehalt $u + v = 20$. Damit ist auch

$$\overline{u} + \overline{v} = 20 \tag{2}$$

Setzt man (2) in (1) ein, so ergibt sich die folgende stationäre Lösung:

$$(\overline{u}, \overline{v}) = (5, 15)$$

Wenn der Zucker 1:3 verteilt ist, dann ist in beiden Lösungen dieselbe Konzentration an Zucker. Folglich ändert weiteres Mischen beider nichts mehr.

Lösung: Aufgabe 2

Hier wenden wir das Gauß-Verfahren an. Mit Hilfe elementarer Umformungen finden wir, daß gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 10 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 12 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -7/10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit können wir schon die Lösung des homogenen Systems ablesen.

Es ist $L_0 = \{l_1, l_2\}$ mit $l_1 = (-3, 2, -1, 1, 0)^t$ *und* $l_2 = (7/10, -9/10, 2/5, 0, 1)^t$.
Also: $L_0 = sl_1 + tl_2$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

Für das inhomogene System findet man

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 10 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 12 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -7/10 & 13/10 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9/10 & -11/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch hier kann man die Lösung einfach ablesen; es ist $L = \widetilde{x} + L_0$ mit $\widetilde{x} = (13/10, -11/10, 3/5, 0, 0)^t$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Lösung: Aufgabe 3

Hier setzt man für A eine allgemeine Lösung an, multipliziert diese mit $(2, 1)^t$ und setzt das Ergebnis gleich $(-1, 2)^t$. Daraus ergeben sich dann alle Bedingungen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b \\ 2c + d \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt das folgende LGS:

$2a + 1b + 0c + 0d = 1$
$0a + 0b + 2c + 1d = 2$

Da die beiden Gleichungen voneinander unabhängig sind, sehen wir daran, daß das Ergebnis zwei freie Paramter enthalten wird. In der Tat findet man mit leichter Rechnung folgendes Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} a & -1 - 2a \\ c & 2 - 2c \end{pmatrix} \; mit \; a, c \in \mathbb{R}.$$

Lösung: Aufgabe 4

Da $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, könnte es auch 0 sein. Daher lösen wir die erste Zeile wie folgt auf:

$$\alpha x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\alpha/2 \cdot x.$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die zweite Zeile ein und erhalten:

$$x + (\alpha + 1)(-\alpha/2 \cdot x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}) \cdot x = 0$$

Nun können wir folgendes feststellen: Ist die Klammer $(1 - \frac{\alpha^2+\alpha}{2})$ ungleich null, so muß x=0 sein. Daraus ergibt sich aber direkt y=0, also nur die triviale Lösung. Das wollen wir eben nicht. Daher sollte die Klammer zu Null werden:

$$(1 - \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}.$$

Damit sind $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = -2$ die zwei möglichen Werte für α, bei denen das System eine nichttriviale Lösung besitzt.